Analysis I für M, LaG/M, Ph
6.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
19.05.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Arithmetisches und Geometrisches Mittel)
Es seien zwei Zahlen $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_1 < b_1$ gegeben. Damit definieren wir rekursiv die beiden Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ durch

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n},\ n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(a) $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 2$.

(b) (a_n) ist monoton wachsend und (b_n) ist monoton fallend.

(c) Beide Folgen sind konvergent.

(d) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Lösung:

(a) *Behauptung:* $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis: Wir machen eine Induktion nach n. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist durch die Voraussetzung $0 < a_1 < b_1$ abgedeckt, so dass wir uns dem Induktionsschritt zuwenden können. Wir setzen also als Induktionsvoraussetzung voraus, dass $0 \leq a_n \leq b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gilt schon einmal $0 \leq a_n b_n$, weshalb sich die Wurzel aus dem Produkt ziehen lässt und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq 0.$$

Weiter können wir wegen $b_n \geq a_n \geq 0$ aus b_n und a_n jeweils die Wurzel ziehen und es gilt natürlich $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0$. Damit gilt

$$a_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + b_n \geq 0 \Longrightarrow a_n + b_n \geq 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \Longrightarrow b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot b_n} = a_{n+1},$$

wie gewünscht. □

(b) *Behauptung:* (a_n) ist monoton wachsend.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen (a)

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n.$$

□

Behauptung: (b_n) ist monoton fallend.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen (a)

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

□

(c) *Behauptung:* Die Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent.
Beweis: Nehmen wir die Erkenntnisse aus (a) und (b) zusammen, so haben wir für jedes $n \geq 2$

$$0 \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Also sind beide Folgen durch b_1 beschränkt. Da sie außerdem nach (b) jeweils monoton sind, konvergieren beide nach dem Monotonie-Kriterium für Folgen (Satz 7.11). □

(d) *Behauptung:* Es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
Beweis: Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b$ und wir erhalten

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}{2} = \frac{a+b}{2},$$

woraus $b/2 = a/2$ und so schließlich $a = b$ folgt. □

Aufgabe G2 (Reihen)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert.

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n}{4^{n+2}}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\right], \qquad \text{(d)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}.$$

Lösung:

(a) Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n}{4^{n+2}} = \frac{5}{4^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{5}{4^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{5}{4}.$$

(b) *Behauptung:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$, divergiert.
Beweis: Notwendig für die Konvergenz der Reihe wäre, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. Wegen $a_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ trifft dies jedoch nicht zu; die Reihe divergiert mithin.

(c) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Binomialformel (Satz 5.2 d)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Also ist mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

(d) Es gilt für jedes $k \geq 2$

$$\frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1},$$

also haben wir für jedes $n \geq 2$ mit einem Indexshift

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe G3 (Riemann I)
Sei (a_n) eine reelle Folge und $a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- := \max\{-a_n, 0\}$. Zeigen Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ jeweils divergent.

Lösung: Beobachtung: Es gelten $a_n = a_n^+ - a_n^-$ und $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.
Sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ist konvergent. Dann ist nach Satz 12.8 auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{k=1}^{\infty}(a_n^+ - a_n)$ konvergent. Wiederum mit Satz 12.8 folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$. Das heißt aber, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, ein Widerspruch! Also kann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ nicht konvergent sein.
Ganz analog: Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ist konvergent. Dann ist nach Satz 12.8 auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^- + a_n)$ konvergent. Wiederum mit Satz 12.8 folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$. Das heißt aber, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, ein Widerspruch! Also kann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ nicht konvergent sein.

Hausübung

Aufgabe H1 (Teleskopsummen)

(a) Zeigen Sie: Jede reelle Folge ist Folge von Partialsummen einer Reihe.

(b) Sei k eine natürliche Zahl, (a_n) eine Nullfolge und $b_n = a_n - a_{n+k}$. Zeigen Sie: Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+k\cdot n}$.

Lösung:

(a) Sei (a_n) eine reelle Folge. Setze $b_1 := a_1$ und für $n \geq 2$: $b_n := a_n - a_{n-1}$. Dann ist

$$a_n = \underbrace{a_1}_{=b_1} + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{=b_2} + \cdots + \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{=b_n} = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

also ist (a_n) die Folge der Partialsummen von (b_n).

(b) Sei $m \geq k$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{m}(a_n - a_{n+k}) = \sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=1}^{m} a_{n+k} = \sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=k+1}^{m+k} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n.$$

Nun ist nach den Rechenregeln für Grenzwerte und da „Verschieben" der Nullfolge (a_n) nichts am Grenzwert ändert,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} b_n &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n \right) \\
&= \sum_{n=1}^{k} a_n - \lim_{m\to\infty} \left(a_{m+1} + \cdots a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{k} a_n - \lim_{m\to\infty} a_{m+1} - \cdots - \lim_{m\to\infty} a_{m+k} \\
&= \sum_{n=1}^{k} a_n - 0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.
\end{aligned}$$

(c) Setze $a_n := \frac{1}{kn}$ und $b_n := \frac{1}{n^2+k\cdot n}$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge und es gilt $b_n = \frac{1}{n^2+k\cdot n} = \frac{1}{k\cdot n} - \frac{1}{k\cdot(n+k)} = a_n - a_{n+k}$. Nach Teil (b) ist also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+k\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$.

Aufgabe H2 (Reihen)
Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Reihenwert.

$$\text{(a)} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n+2}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^{n+5})^2}{11 \cdot 2^{3n}}.$$

$$\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n}.$$

Lösung:

(a)

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n+2} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Wäre $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergent, dann auch die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n}$. Da dies nicht der Fall ist (Beispiel 12.4 d), muss $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n+2}$ divergieren.

(b) Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^{n+5})^2}{11 \cdot 2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{10}}{11} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^n.$$

Da die Folge $\left(3^{10}/11 \cdot (9/8)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nicht gegen Null konvergiert, muss die Reihe divergent sein (Satz 12.6 c).

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right].$$

Da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ und $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ Nullfolgen sind, ergibt sich mit H1 (b):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Mit Satz 12.8 folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(d) Da die geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ konvergieren mit Werten $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$ (Beispiel 12.4 c), gilt nach Satz 12.8

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{9}{16} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{5} = \frac{23}{10}.$$

Aufgabe H3 (Eine Abwandlung der geometrischen Reihe)
Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$.

(a) Beweisen Sie mit Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}.$$

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Tipp: Betrachten Sie zunächst die Folge $\left(\sqrt[n]{(n+1)|q|^n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Bemerkung: Sie werden bald lernen, wie sich der Grenzwert dieser Reihe einfacher berechnen lässt.

Lösung:

(a) *Behauptung:*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}.$$

Beweis (Induktion):

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{1} k \cdot q^{k-1} = 1 = \frac{(1-q)^2}{(1-q)^2} = \frac{1-(1+1)q^1+1\cdot q^{1+1}}{(1-q)^2}$ wahr.

Induktionsannahme: Für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot q^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k-1} + (n+1)q^n \\ &\overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} + (n+1)q^n \\ &= \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} + \frac{(n+1)q^n(1-2q+q^2)}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} + \frac{(n+1)q^n - 2(n+1)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2})}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1-(n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}.\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung auch für $n+1$. □

(b) Wir zeigen, dass die Folgen $\big((n+1)q^n\big)_{n=1}^{\infty}$ und $\big(nq^{n+1}\big)_{n=1}^{\infty}$ Nullfolgen sind. Daraus ergibt sich dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1-\lim_{n\to\infty}(n+1)q^n + \lim_{n\to\infty} nq^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Behauptung: $\big((n+1)|q|^n\big)_{n=1}^{\infty}$ ist Nullfolge.

Beweis: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|q|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot |q|$. Da $1 \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{n^2}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (alle $n \geq 2$) und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, konvergieren die beschränkenden Folgen $(1)_{n=1}^{\infty}$ und $\big(\sqrt[n]{n^2}\big)_{n=1}^{\infty}$ gegen 1 konvergieren. Mit dem Sandwichtheorem folgt, dass das auch die Folge $\big(\sqrt[n]{n+1}\big)_{n=1}^{\infty}$ tut. Also $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|q|^n} = |q| < 1$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $|q| + \varepsilon < 1$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\left|\sqrt[n]{(n+1)|q|^n} - |q|\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $\sqrt[n]{(n+1)|q|^n} < |q| + \varepsilon$, also $0 \leq (n+1)|q|^n < (|q|+\varepsilon)^n$ für fast alle n (alle $n \geq n_0$). Da die Folge $\big((|q|+\varepsilon)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ gegen Null konvergiert ($|q|+\varepsilon < 1$), ist mit dem Sandwichtheorem auch $\big((n+1)|q|^n\big)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge.

Alternativ lässt sich statt mit dem Sandwichtheorem auch über das Wurzelkriterium für Reihen argumentieren: Für fast alle n (alle $n \geq n_0$) ist $\sqrt[n]{(n+1)|q|^n} < |q| + \varepsilon < 1$, daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|q|^n$ nach Wurzelkriterium, also ist die summierte Folge $\big((n+1)|q|^n\big)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. □

Daraus folgt wegen $|(n+1)q^n| = (n+1)|q|^n$, dass $\big((n+1)q^n\big)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, und dass die verschobene Folge $\big((n+2)|q|^{n+1}\big)_{n=1}^{\infty}$ gegen Null konvergiert. Mit $0 \leq n|q|^{n+1} \leq (n+2)|q|^{n+1}$ folgt wiederum, dass $\lim n|q|^{n+1} = 0$, somit auch $\lim nq^{n+1} = 0$. Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung: Die Formel aus Teil (a) findet man beispielsweise, indem man in folgendem Schema einerseits die Spalten, andererseits die Zeilen mit Hilfe der Formel für die Partialsummen der geometrischen Reihe aufaddiert.

$$\begin{array}{ccccc} q^0 & q^1 & q^2 & \dots & q^n \\ & q^1 & q^2 & & \vdots \\ & & q^2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & q^n \end{array}$$

Eine andere Variante ist, wenn man einmal Polynome differenzieren kann, die Summe $\sum_{k=1}^{n} q^k$ nach q abzuleiten.