Analysis I für M, LaG/M, Ph
5.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
12.05.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Oberer und unterer Limes)
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ und es gelte $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Unter welchen weiteren Bedingungen gilt dabei sogar „=“ anstelle von „≤“?

(a) Keine weiteren Bedingungen.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent.

Beweisen Sie in (a), (b) und (c) jeweils ihre Antwort, bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösung:
Behauptung: $\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$
Beweis: Wir setzen

$$A := \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad B := \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad C := \limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n).$$

Wir können eine Teilfolge $(a_{n_k} \cdot b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen, die gegen C konvergiert. Das liefert uns eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nach Voraussetzung beschränkt ist. Also besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Häufungspunkt a von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $a \geq 0$ und außerdem ist ob der Definition des Limes superior klar, dass $a \leq A$ gelten muss.
Wir betrachten nun die dazu passende Teilfolge $(b_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da diese auch beschränkt ist, hat sie ebenfalls eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_{\ell_m}}})_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Häufungspunkt b von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, für den wie oben $0 \leq b \leq B$ gilt.
Wir betrachten nun wieder die Produktfolge $(a_{n_{k_{\ell_m}}} \cdot b_{n_{k_{\ell_m}}})_{m\in\mathbb{N}}$. Diese ist eine Teilfolge von $(a_{n_k} \cdot b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, konvergiert also wie diese gegen C. Zusammengenommen gilt damit

$$C = \lim_{m\to\infty}(a_{n_{k_{\ell_m}}} \cdot b_{n_{k_{\ell_m}}}) = \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} \cdot \lim_{m\to\infty} b_{n_{k_{\ell_m}}} = a \cdot b \leq A \cdot B,$$

was zu zeigen war. □

(a) Ohne weitere Bedingungen gilt im Allgemeinen nicht Gleichheit.
Gegenbeispiel: Wir setzen $a_n := 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $b_n := 1 + (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 2,$$

aber es ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \cdot b_n = 1 + (-1)^{n+1} + (-1)^n + (-1)^{2n+1} = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0 < 2 = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) *Behauptung:* Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt Gleichheit.
Beweis: OBdA sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n =: a.$$

Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dieser Folge, die gegen $\limsup_{n\to\infty} b_n$ strebt. Betrachten wir nun die Produktfolge $(a_{n_k}\cdot b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so ist diese als Produkt zweier konvergenter Folgen konvergent und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}\cdot b_{n_k} = a\cdot \limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Da wir oben schon im allgemeinen Fall die umgekehrte Ungleichung bewiesen haben, folgt damit die Behauptung. □

(c) Sind beide Folgen konvergent gilt Gleichheit nach (b), denn dann ist insbesondere auch eine der beiden konvergent.

Aufgabe G2 (Häufungspunkte)
Bestimmen Sie jeweils alle Häufungspunkte der folgenden Folgen:

$$a_n := (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\; n\in\mathbb{N}$$
$$b_n := (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}},\; n\in\mathbb{N}$$
$$c_n := 2^n,\; n\in\mathbb{N}.$$

Lösung:

(a) Siehe Beispiel 10.7 im Skript.

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Insbesondere konvergiert auch jede Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Damit hat die Folge nach Lemma 2.6 genau einen Häufungspunkt, nämlich 0.

(c) *Behauptung:* Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt.
Beweis: Wir nehmen an, es gäbe einen Häufungspunkt $a\in\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert. Da jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, gibt es also ein $k_0\in\mathbb{N}$, so dass $|c_{n_k}-c_{n_\ell}|<1$ für alle $k,\ell\geq k_0$ gilt. Wählen wir speziell $\ell=k+1$, so bekommen wir wegen $n_{k+1}\geq n_k+1$ und $n_k\geq 1$

$$1 > |c_{n_k}-c_{n_{k+1}}| = 2^{n_{k+1}}-2^{n_k} \geq 2^{n_k+1}-2^{nk} = 2^{n_k}(2-1) = 2^{n_k}\geq 2,$$

was ein Widerspruch ist. □

Aufgabe G3 (Cauchy-Folgen)
Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $a_0=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$. In Tutorium 4, Aufgabe 4 wurde gezeigt, dass diese Folge gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n\in\mathbb{Q}$ für alle $n\in\mathbb{N}$

(b) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Folgern Sie, dass die Folge nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert. Ist dies ein Widerspruch zu Satz 11.2?

Lösung:

(a) Wir beweisen die Behauptung per Induktion.
Induktionsanfang: $n=0$: $a_0=2\in\mathbb{Q}$ $\quad\checkmark$
Induktionsannahme: Für ein $n\in\mathbb{N}$ gilt $a_n\in\mathbb{Q}$.
Induktionsschluss: $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$. Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, gilt mit $a_n\in\mathbb{Q}$ (Induktionsannahme) ebenfalls $\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)\in\mathbb{Q}$ (da $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$) und somit $a_{n+1}\in\mathbb{Q}$.

(b) Sei $\epsilon > 0$. Da (a_n) gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m > n_0$ $|a_n - \sqrt{2}| < \epsilon/2$ und $|a_m - \sqrt{2}| < \epsilon/2$. Mit Hilfe der Dreieckungleichung folgt nun

$$|a_n - a_m| = |a_n - \sqrt{2} + \sqrt{2} - a_m| \leq |a_n - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(a_n) ist also eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$. Aus Teil a) folgt nun, dass (a_n) eine Cauchy Folge in $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Die Folge konvergiert also nicht in $\mathbb{Q}$. Dies ist kein Widerspruch zu Satz 11.2, da dieser für die *reellen* Zahlen formuliert ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Oberer und unterer Limes)
Bestimmen Sie für die nachstehenden Folgen reeller Zahlen den unteren Limes sowie den oberen Limes.

$$a_n := \begin{cases} (1+\frac{1}{n})^n & n \text{ ungerade} \\ (1+\frac{1}{n})^{n+1} & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$b_n := (-1)^n \sqrt[n]{n} + \frac{n!}{n^n}$$

$$c_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & n = 3k \\ 2 + \frac{n+1}{n} & n = 3k+1 \\ 2 & n = 3k+2 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lösung:

(a) Wir bestimmen zunächst alle Häufungswerte und verwenden anschließend Satz 10.10.
Wir betrachten zunächst $a_{2k+1} = (1 + \frac{1}{2k+1})^{2k+1}$, was sowohl eine Teilfolge von (a_n) als auch von $(1 + \frac{1}{n})^n$ ist. Letzteres konvergiert nach Satz 8.6 und Definition 8.7 gegen e. Nach Satz 10.6 b) konvergiert a_{2k+1} somit auch gegen e und nach Satz 10.6 a) ist e ein Häufungswert von (a_n).
Für die Teilfolge $a_{2k} = (1+\frac{1}{2k})^{2k+1} = (1+\frac{1}{2k})^{2k} \cdot (1+\frac{1}{2k})$ betrachten wir zunächst $\bar{a}_{2k} = (1+\frac{1}{2k})^{2k}$ und $\hat{a}_{2k} = 1+\frac{1}{2k}$ getrennt. $\bar{a}_{2k}$ ist eine Teilfolge von $(1 + \frac{1}{n})^n$ und konvergiert somit nach Satz 10.6 b) gegen e. $\hat{a}_{2k}$ ist andererseits eine Teilfolge von $1 + \frac{1}{n}$ und konvergiert ebenfalls nach Satz 10.6 b) gegen 1. Nach Satz 7.8 d) ist der Grenzwert von a_{2k} gleich e, und somit nach Satz 10.6 a) ein Häufungswert von (a_n), den wir allerdings bereits kennen.
Wir wollen nun zeigen, dass (a_n) keine weiteren Häufungswerte besitzt. Sei dazu $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq e$ und $\epsilon := \frac{1}{2}|e-\alpha|$. Es gilt also $\epsilon > 0$ und $U_\epsilon(e) \cap U_\epsilon(\alpha) = \emptyset$. Aus der Konvergenz der beiden Teilfolgen a_{2k+1} und a_{2k} von (a_n) wissen wir, dass $a_n \in U_\epsilon(e)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies wiederum bedeutet, dass höchstens endlich viele Folgenglieder in $U_\epsilon(\alpha)$ liegen können. Somit ist α kein Häufungswert von (a_n).
Es gilt also $H(a_n) = \{e\}$ und somit $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = e$. Die Folge (a_n) ist also sogar konvergent.

(b) Wir betrachten zunächst $b_{2k} = \sqrt[2k]{2k} + \frac{(2k)!}{(2k)^{2k})}$. $\sqrt[2k]{2k}$ ist eine Teilfolge von $\sqrt[n]{n}$ und somit nach Satz 8.4 und Satz 10.6 b) konvergent mit Grenzwert 1. $\frac{(2k)!}{(2k)^{2k})}$ ist eine Teilfolge von $\frac{n!}{n^n}$. Für $\frac{n!}{n^n}$ gilt nun aber (siehe auch Übung 4, Aufgabe G3)

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$

die Folge konvergiert also nach Satz 7.8 f) gegen 0, was nach Satz 10.6 b) auch für $\frac{(2k)!}{(2k)^{2k})}$ gilt. Zusammen ergibt sich also wieder mit Satz 7.8 c), dass b_{2k} gegen 1 konvergiert, nach Satz 10.6 b) ist 1 also Häufungswert von b_n.
Betrachten wir nun $b_{2k+1} = -\sqrt[2k+1]{2k+1} + \frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1})}$. Wir können die gleiche Argumentation führen wie für b_{2k} und erhalten unter Beachtung des negativen Vorzeichens den Häufungswert -1 von b_n. Die Argumentation, dass es keine weiteren Häufungswerte gibt, verläuft analog zu Beispiel 10.7 im Skript.
Der untere Limes von b_n ist also -1, der obere 1.

(c) Wir gehen ähnlich vor wie in Teil a). Betrachte zunächst $c_{3k} = 1 + \frac{1}{2^{3k}}$. Dies ist auch eine Teilfolge von $1 + \frac{1}{2^n}$, was gegen 1 konvergiert. Mit den gleichen Argumenten wie in Teil a) ist also 1 ein Häufungswert von c_n.
Betrachte nun $c_{3k+1} = 2 + \frac{3k+1}{3k+1} + \frac{1}{3k+1} = 3 + \frac{1}{3k+1}$. $\frac{1}{3k+1}$ ist eine Teilfolge von $\frac{1}{n}$ und konvergiert somit gemäß Satz 10.6 b) gegen 0. Zusammen mit Satz 7.8 d) und Satz 10.6 a) folgt also, dass 3 ein Häufungswert von c_n ist.

Aus der Teilfolge $c_{3k+2} = 2$ erhalten wir schließlich den Häufungswert 2.

Die Argumentation, dass es keine weiteren Häufungswerte gibt, verläuft analog zu Beispiel 10.7 im Skript mit dem Unterschied, dass wir diesmal 3 Häufungswerte haben. Wir erhalten also $H(c_n) = \{1,2,3\}$ und mit Satz 10.10 $\limsup_{n\to\infty} c_n = \max H(c_n) = 3$ und $\liminf_{n\to\infty} c_n = \min H(c_n) = 1$.

Aufgabe H2 (Häufungswerte)
Berechnen Sie alle Häufungswerte der angegebenen Folgen

$$a_n := \sqrt{n}\left(\sqrt{5+n} - \sqrt{2+n}\right)$$
$$b_n := \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}$$
$$c_n := \sqrt[n]{n!}$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n}\left(\sqrt{5+n} - \sqrt{2+n}\right) \\ &= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{5+n} - \sqrt{2+n}\right)\left(\sqrt{5+n} + \sqrt{2+n}\right)}{\sqrt{5+n} + \sqrt{2+n}} \\ &= \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{5+n} + \sqrt{2+n}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{\frac{5}{n}+1} + \sqrt{\frac{2}{n}+1}} \end{aligned}$$

Mit Satz 8.1 folgt somit $\lim_{n\to\infty} = \frac{3}{2}$. Somit ist also $\frac{3}{2}$ einziger Häufungswert.

(b) Es gilt

$$b_n = \frac{3^n}{3^n} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}.$$

Da $\frac{2}{3} < 1$ folgt, wegen $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, dass $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = -1$. Damit sind also 1 und -1 Häufungswerte von b_n. Weitere kann es nicht geben, denn eine Teilfolge mit sowohl unendlich vielen Folgegliedern mit geraden Indizes als auch unendlich vielen Folgegliedern mit ungeraden Indizes besitzt bereits 1 und -1 als Häufungswerte, kann also nicht konvergent sein.

(c) Es gilt $(2n)! \geq \prod_{k=n}^{2n} k \geq n^{n+1}$. Damit folgt

$$\sqrt[2n]{(2n)!} \geq \sqrt[2n]{n^{n+1}} \geq \sqrt{n} \quad \text{und} \quad \sqrt[2n+1]{(2n+1)!} \geq \sqrt[2n+1]{n^{n+1}} \geq \sqrt{n}.$$

Das bedeutet also, dass die Folge c_n bestimmt divergent ist und somit keinen Häufungswert besitzt.

Aufgabe H3 (Cauchy-Folgen)
Sei $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_n := (a_{n-1} + a_{n-2})/2$ für $n = 2,3,\ldots$. Zeigen Sie induktiv, dass $a_{n+1} - a_n = (-1)^n/2^n$ und beweisen Sie die Konvergenz der Folge (a_n) mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums.

Lösung: Wir zeigen zunächst $a_{n+1} - a_n = (-1)^n/2^n$.

Induktionsanfang: $n = 0$: $a_{n+1} - a_n = 1 - 0 = 1 = \frac{(-1)^0}{2^0} = \frac{(-1)^n}{2^n}$ $\quad\checkmark$

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n - a_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - a_n\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(a_n - a_{n-1}\right) \\ &= \frac{-1}{2} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu o.B.d.A. $m > n$, d.h. $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$a_{n+k} - a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} - + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{n+k}} \right)$$

Durch umklammern in der Form

$$\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+3}} \right) \ldots$$

sehen wir, dass der Ausdruck in der Klammer positiv ist (der letzte Summand $\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}$ bleibt nur bei ungeradem k übrig und ist in dem Fall positiv).
Andererseits liefert umklammern in der Form

$$\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \right) - \left(\frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+4}} \right) \ldots,$$

dass der Ausdruck in der Klammer $< \frac{1}{2^n}$ ist.
Es folgt somit, dass für alle k

$$|a_{n+k} - a_n| = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} - + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{n+k}} < \frac{1}{2^n}$$

woraus wiederum folgt, dass a_n dem Cauchy-Kriterium genügt.