Analysis I für M, LaG/M, Ph
4.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
05.05.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvergenz von Folgen)
Beweisen Sie:

(a) Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist die reelle Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent, dann auch $(a_{n+k})_{n=1}^{\infty}$, und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Lösung:

(a) (a_n) konvergiert gegen a
$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . |a_n - a| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . \Big| |a_n - a| - 0 \Big| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow\ (|a_n - a|)$ konvergiert gegen 0.

(b) Angenommen die reelle Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen a.
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Ist $n \geq n_0$, dann auch $n + k \geq n_0$. Also gilt $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Dies zeigt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Nach Definition konvergiert daher (a_{n+k}) gegen a.

Aufgabe G2 (Konvergenz von Folgen)
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{(2n^2 - 3n)(n^3 + 1)}{(n+2)(n^2 + n^4)},\ n \in \mathbb{N}, \qquad b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N},$$

$$c_n := \frac{n^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}, \qquad d_n := \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n.$$

Lösung:

a_n: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach kürzen mit n^5:

$$a_n = \frac{2n^5 - 3n^4 + 2n^2 - 3n}{n^5 + 2n^4 + n^3 + 2n^2} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^4}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}.$$

Zur Bestimmung dieses Grenzwertes verwenden wir die Rechenregeln für konvergente Folgen aus Satz 7.8. Wir haben bereits gesehen, dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ ist. Also ist mit Satz 7.8 (d) ii), angewandt auf die Folge $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ und $\alpha = -3$ auch die Folge $(-3/n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert $-3 \cdot 0 = 0$. Genauso argumentiert man, dass die Folgen $\left(2/n^3\right)_{n=1}^{\infty}$, $(-3/n^4)_{n=1}^{\infty}$, $(2/n)_{n=1}^{\infty}$, $\left(1/n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ und $\left(2/n^3\right)_{n=1}^{\infty}$ allesamt Nullfolgen sind.
Mit Satz 7.8 d) i) gilt dann $\lim_{n\to\infty}(2 - 3/n + 2/n^3 - 3/n^4) = 2 + 0 + 0 + 0 = 2$ und $\lim_{n\to\infty}(1 + 2/n + 1/n^2 + 2/n^3) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$. Wenden wir nun noch auf die Folgen im Zähler und Nenner Lemma 7.8 d) iii) und iv) an (man beachte, dass die Folge im Nenner nicht gegen Null konvergiert!), so bekommen wir $\lim_{n\to\infty} a_n = 2/1 = 2$.

Bemerkung: In dieser Ausführlichkeit macht man sich diese Argumentation natürlich nur einmal klar, danach schreibt man sowas folgendermaßen auf: Wegen der Rechenregeln für konvergente Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{3}{n^4}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{2-0+0-0}{1+0+0+0} = 2.$$

b_n: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Da dieser Ausdruch immer positiv ist und $\sqrt{n} \le \sqrt{n+1}$ gilt, erhalten wir damit für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Nun ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{\text{Satz 7.8}}{=} \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \overset{\text{Satz 8.1}}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \overset{\text{Bsp. 7.4}}{=} 0$. Wir erhalten mit dem Sandwichsatz, angewandt auf die konstante Folge $(0)_{n=1}^{\infty}$, die Folge $\left(1/(2\sqrt{n})\right)_{n=1}^{\infty}$ und die Folge $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$, dass $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergent ist und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ gilt.

c_n: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{1} \ge \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{n}{1} = n.$$

Nehmen wir nun an die Folge $\left(c_n\right)_{n=1}^{\infty}$ wäre beschränkt, d.h. es gäbe ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|c_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir

$$M \ge |c_n| = c_n \ge n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$. Also kann $\left(c_n\right)_{n=1}^{\infty}$ nicht beschränkt und damit auch nicht konvergent sein.

d_n: Betrachte die Folge $\left(d'_n\right)_{n=1}^{\infty}$ mit $d'_n := \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Es gibt also $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Dann ist auch $|d'_n - e| = \left|\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} - e\right| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$ (sogar für $n \ge \frac{n_0}{3}$). Also konvergiert (d'_n) gegen e. Nun gilt $d_n = \sqrt[3]{d'_n}$. Mit Satz 8.1 folgt $\lim_{n\to\infty} d_n = \sqrt[3]{e}$.

Aufgabe G3 (rekursiv definierte Folge)
Sei $a_1 \in (0,1)$ und $a_{n+1} := a_n(2-a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hat diese Folge einen Grenzwert?
Es gibt zwei verschiedene Lösungswege, die hier beide gefunden werden sollen.

(a) Leiten Sie aus der rekursiven Vorschrift Eigenschaften ab, die Aussagen über die Konvergenz liefern (analog zu Beispiel 7.12 aus der Vorlesung).

(b) Finden Sie eine Darstellung von a_n, die von a_1 und n, aber nicht mehr von a_{n-1} abhängt und die also insbesondere nicht mehr rekursiv ist. Daraus lassen sich die Konvergenzeigenschaften ganz leicht ablesen.

Lösung: *Behauptung:* Die Folge konvergiert gegen 1.

(a) Wir zeigen zunächst mit Induktion: $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
Induktionsanfang: Nach Voraussetzung ist $0 < a_1 < 1$.
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $0 < a_n < 1$.
Induktionsschritt: $a_{n+1} = a_n(2-a_n) = 1-(1-a_n)^2 \overset{(0<a_n)}{<} 1$. Da $0 < a_n < 1$, ist $0 < (1-a_n)^2 < 1$, also auch $a_{n+1} > 0$.
□
Aus $a_n < 1$ folgt $2 - a_n > 1$, somit $a_{n+1} = a_n(2-a_n) > a_n$.
Die Folge (a_n) wächst monoton und ist beschränkt, hat also nach Monotonie-Kriterium einen Grenzwert a.
Da nach G1(b) auch (a_{n+1}) gegen a konvergiert, folgt mit den Grenzwertsätzen (siehe H1), dass $a = a(2-a)$, also $0 = a(1-a)$, d.h. $a = 1$ oder $a = 0$. Der Fall $a = 0$ kann nicht auftreten, weil die Folge monoton wächst mit $a_1 > 0$.
Also $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(b) Wir zeigen induktiv: $a_n = 1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: $a_1 = 1-(1-a_1) = 1-(1-a_1)^{2^{1-1}}$.
Induktionsvoraussetzung: Für ein n gelte $a_n = 1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$.
Induktionsschritt:

$$a_{n+1} = a_n(2-a_n) = (1-(1-a_1)^{2^{n-1}})(1+(1-a_1)^{2^{n-1}}) = 1-(1-a_1)^{2^n}.$$

□

Wegen $a_1 \in (0,1)$ ist: $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\text{Satz 7.8}}{=} 1 - \lim_{n\to\infty}(1-a_1)^{2^n} \overset{\text{Satz 8.2}}{=} 1$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Rechenregeln für Grenzwerte)
Es seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(b) $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_b$. Setze $n_0 := \max\{n_a, n_b\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also konvergiert $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt $|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha| \cdot |a_n - a| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert (αa_n) gegen αa.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\varepsilon' := \min\{\varepsilon, 1\}$ und wähle $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon'}{3(1+|b|)}$ für alle $n \geq n_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon'}{3(1+|a|)}$ für alle $n \geq n_b$. Setze $n_0 := \max\{n_a, n_b\}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon'}{3(1+|b|)} \cdot |b_n| + |a| \cdot \frac{\varepsilon'}{3(1+|a|)} \leq \frac{\varepsilon'}{3(1+|b|)} \cdot |b + b_n - b| + \frac{\varepsilon'}{3} \\
&\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{\varepsilon'}{3(1+|b|)} \cdot |b| + \frac{\varepsilon'}{3(1+|b|)} \cdot |b_n - b| + \frac{\varepsilon'}{3} < \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'^2}{9} + \frac{\varepsilon'}{3} \overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'}{9} + \frac{\varepsilon'}{3} \leq \varepsilon' \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Bei $(*)$ wurde verwendet, dass $\varepsilon'^2 \leq \varepsilon'$, da $0 \leq \varepsilon' \leq 1$.
Also konvergiert $(a_n \cdot b_n)$ gegen $a \cdot b$.

Aufgabe H2 (Konvergenz von Folgen)
Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$
e_n := \frac{c_{n+1}}{c_n},\ n \in \mathbb{N},\ (c_n \text{ wie in G2}) \qquad f_n := \frac{3^n \cdot n^3}{\binom{2n}{n}},\ n \in \mathbb{N},
$$

$$
g_n := (-1)^n \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right),\ n \in \mathbb{N}, \qquad h_n := \sqrt[n]{n+5},\ n \in \mathbb{N}.
$$

Lösung:

e_n: Es gilt

$$
e_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) \cdot n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,
$$

also konvergiert (e_n) gegen die Eulersche Zahl e.

f_n: Wir betrachten die Folge der Quotienten

$$
\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)^3}{\binom{2n+2}{n+1}} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n \cdot n^3} = 3\frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!}} = 3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.
$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 7.8 d) gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$. Wähle n_0 so, dass $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{8}$ ist für alle $n \geq n_0$. Dann gilt $\frac{f_{n+1}}{f_n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1$ für alle $n \geq n_0$. Nun ist für $n \geq n_0$, da alle f_n und somit $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ positiv sind,

$$
0 \leq f_n = f_{n_0} \cdot \frac{f_{n_0+1}}{f_{n_0}} \cdot \frac{f_{n_0+2}}{f_{n_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{f_n}{f_{n-1}} \leq f_{n_0} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{7}{8} = f_{n_0} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-n_0} = f_{n_0} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{n_0} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n.
$$

Nach Satz 8.2 konvergiert die Folge $((7/8)^n)$ gegen 0, also gilt das auch für $(f_{n_0} \cdot (8/7)^{n_0} \cdot (7/8)^n)$. Nach dem Sandwich-Theorem, angewandt auf die Folgen (0), (f_n) und $(f_{n_0} \cdot (8/7)^{n_0} \cdot (7/8)^n)$, ist damit (f_n) eine Nullfolge.

g_n: Wie bei der Behandlung von b_n in (G2), erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$

$$g_n = (-1)^n \sqrt{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = (-1)^n \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

Mit Satz 7.8 (d) und Satz 8.1 folgt

$$\lim_{n\to\infty} |g_n| = \frac{1}{1+\sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Wäre (g_n) konvergent mit Grenzwert $g \in \mathbb{R}$, dann wäre nach Satz 7.8 (c) $|g| = \lim_{n\to\infty} |g_n| = \frac{1}{2}$. Für den Limes kämen also nur $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ in Frage. Wäre $\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1}{2}$, dann gäbe es $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\left|g_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Dann wäre aber $g_n > 0$ für alle $n \geq n_0$, ein Widerspruch! Ganz analog im Fall $\lim_{n\to\infty} g_n = -\frac{1}{2}$.
Also muss die Folge divergent sein.

h_n: Wegen $n \leq n+5$ ist $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+5}$. Wegen $n+5 \leq n^2$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. hier: für $n \geq 3$) haben wir $\sqrt[n]{n+5} \leq \sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Laut Vorlesung gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, nach Satz 7.8 (d) ist auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$. Mit dem Sandwich-Theorem (Satz 7.8 f) folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+5} = 1$.

Aufgabe H3 (Cesàro-Mittel)
Es sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine reelle Folge. Wir definieren $b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$.

(a) Beweisen Sie: Falls (a_n) konvergiert, dann auch (b_n), und zwar gegen den gleichen Grenzwert.
Hinweis: Wählen Sie zunächst (geschickt) $n_1 \in \mathbb{N}$ *und zerlegen Sie für* $n \geq n_1$ *die Summen* $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^n a_k$.

(b) Zeigen Sie: Die Umkehrung ist falsch, d.h. wenn (b_n) konvergiert, dann nicht notwendig auch (a_n).

(c) Konvergiert stets (b_n), wenn (a_n) beschränkt ist? Beweis oder Gegenbeispiel.

Bemerkung: Die Folge (b_n) *heißt Cesàro-Mittel von* (a_n).

Lösung:

(a) Es sei a der Grenzwert von (a_n). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n_1} |a_k - a|$ (das gibt es nach dem Satz von Archimedes, Satz 3.4 b). Ist nun $n \geq n_0$, dann

$$\left|b_n - a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (a_k - a)\right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |a_k - a| = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n_1+1}^n |a_k - a| + \sum_{k=1}^{n_1} |a_k - a|\right)$$

$$< \frac{n-n_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} |a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_1} |a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert (b_n) gegen a.

(b) *Gegenbeispiel:* Setze $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade}\end{cases}$. Wie in der Vorlesung gezeigt, divergiert (a_n) (Beispiel 7.4 c). Da aber $-\frac{1}{n} \leq |b_n| \leq 0$, konvergiert (b_n) nach dem Sandwich-Theorem (Satz 7.8 f) gegen 0. □

(c) *Behauptung:* (b_n) konvergiert nicht immer, wenn (a_n) beschränkt ist.
Gegenbeispiel: Setze $a_n := (-1)^k$, falls $3^{k-1} < n \leq 3^k$ für $k \in \mathbb{N}$, und $a_1 := 1$. (da die Folge $(3^k)_{k=0}^\infty$ monoton wächst und unbeschränkt ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, genau ein solches k)
Dann gilt $|b_{3^k} - (-1)^k| \leq \frac{2}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|b_{3^k} - (-1)^k\right| = \left|\frac{1}{3^k}\sum_{n=1}^{3^k} a_n - (-1)^k\right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{3^k}\sum_{n=1}^{3^k}\left|a_n - (-1)^k\right|$$

$$= \frac{1}{3^k}\sum_{n=1}^{3^{k-1}}\left|a_n - (-1)^k\right| + \frac{1}{3^k}\sum_{n=3^{k-1}+1}^{3^k}\left|a_n - (-1)^k\right|$$

$$\overset{|a_n|=1}{\leq} \frac{1}{3^k}\sum_{n=1}^{3^{k-1}} 2 + \frac{1}{3^k}\sum_{n=3^{k-1}+1}^{3^k} 0 = \frac{2}{3}.$$

Das bedeutet aber, dass (b_n) nicht konvergieren kann. Ansonsten hätte (b_n) einen Grenzwert b. Es gäbe n_0 so, dass $|b_n - b| < \frac{1}{3}$ für alle $n \geq n_0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ so, dass $3^k \geq n_0$. Dann ist

$$|b - (-1)^k| = |b - b_{3^k} + b_{3^k} - (-1)^k| \leq |b - b_{3^k}| + |b_{3^k} - (-1)^k| < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

und

$$|b - (-1)^{k+1}| = |b - b_{3^{k+1}} + b_{3^{k+1}} - (-1)^{k+1}| \leq |b - b_{3^{k+1}}| + |b_{3^{k+1}} - (-1)^{k+1}| < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Es würde folgen

$$2 = |(-1)^k - (-1)^{k+1}| = |(-1)^k - b + b - (-1)^{k+1}| \leq |(-1)^k - b| + |b - (-1)^{k+1}| < 1 + 1 = 2,$$

ein Widerspruch.