Analysis I für M, LaG/M, Ph
4.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
05.05.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvergenz von Folgen)
Beweisen Sie:

(a) Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist die reelle Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent, dann auch $(a_{n+k})_{n=1}^{\infty}$, und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Aufgabe G2 (Konvergenz von Folgen)
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{(2n^2-3n)(n^3+1)}{(n+2)(n^2+n^4)},\ n \in \mathbb{N}, \qquad b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N},$$

$$c_n := \frac{n^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}, \qquad d_n := \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n.$$

Aufgabe G3 (rekursiv definierte Folge)
Sei $a_1 \in (0,1)$ und $a_{n+1} := a_n(2-a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hat diese Folge einen Grenzwert?
Es gibt zwei verschiedene Lösungswege, die hier beide gefunden werden sollen.

(a) Leiten Sie aus der rekursiven Vorschrift Eigenschaften ab, die Aussagen über die Konvergenz liefern (analog zu Beispiel 7.12 aus der Vorlesung).

(b) Finden Sie eine Darstellung von a_n, die von a_1 und n, aber nicht mehr von a_{n-1} abhängt und die also insbesondere nicht mehr rekursiv ist. Daraus lassen sich die Konvergenzeigenschaften ganz leicht ablesen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Rechenregeln für Grenzwerte)
Es seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(b) $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

Aufgabe H2 (Konvergenz von Folgen)
Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$e_n := \frac{c_{n+1}}{c_n},\ n \in \mathbb{N},\ (c_n \text{ wie in G2}) \qquad f_n := \frac{3^n \cdot n^3}{\binom{2n}{n}},\ n \in \mathbb{N},$$

$$g_n := (-1)^n \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right),\ n \in \mathbb{N}, \qquad h_n := \sqrt[n]{n+5},\ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe H3 (Cesàro-Mittel)
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge. Wir definieren $b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

(a) Beweisen Sie: Falls (a_n) konvergiert, dann auch (b_n), und zwar gegen den gleichen Grenzwert.
Hinweis: Wählen Sie zunächst (geschickt) $n_1 \in \mathbb{N}$ und zerlegen Sie für $n \geq n_1$ die Summen $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n} a_k$.

(b) Zeigen Sie: Die Umkehrung ist falsch, d.h. wenn (b_n) konvergiert, dann nicht notwendig auch (a_n).

(c) Konvergiert stets (b_n), wenn (a_n) beschränkt ist? Beweis oder Gegenbeispiel.

Bemerkung: Die Folge (b_n) heißt Cesàro-Mittel von (a_n).