Analysis I für M, LaG/M, Ph
3.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
28.04.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Infima und Suprema)

(a) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen.
Beweisen Sie: $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
Gilt zusätzlich $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Kann hier das Kleiner-Zeichen auftreten?

(b) Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum von

$$B := \left\{ \frac{x}{1+x} : x > -1 \right\},$$

falls diese existieren.

Lösung:

(a) *1. Behauptung:* $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Beweis: O.B.d.A. sei $\sup A = \max\{\sup A, \sup B\}$. $A \cup B$ ist nichtleer und beschränkt, denn ist z.B. a eine obere Schranke von A und b eine obere Schranke von B, dann ist $\max\{a, b\}$ eine obere Schranke von $A \cup B$. Damit existiert $\sup(A \cup B)$.

Sei $x < \sup A$. Dann ist x keine obere Schranke von $A \cup B$, denn, da $x < \sup A$, existiert ein $x_A \in A$ mit $x < x_A \leq \sup A$. Da $x_a \in A \cup B$, ist x keine obere Schranke von $A \cup B$. Damit folgt $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

2. Behauptung: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

Beweis: $A \cap B$ ist nicht leer (nach Voraussetzung) und beschränkt, da A und B beschränkt sind. Also existiert $\sup(A \cap B)$. Für alle $x \in A \cap B$ gilt auch $x \in A$. Damit folgt $x \leq \sup(A)$. Ebenso gilt $x \in B$, also $x \leq \sup(B)$. Insgesamt folgt also $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Beispiel: Sei $A := \{-1, 0, 1\}$, $B := \{-2, 0, 2\}$. Dann gilt $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$. Das Kleiner-Zeichen kann hier also auftreten.

(b) $B := \left\{ \frac{x}{1+x} : x > -1 \right\}$. Es gilt $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$. Für $x > -1$ gilt $\frac{1}{1+x} > 0$, also ist B durch 1 nach oben beschränkt.
Behauptung: $\sup B = 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{1+n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Damit gilt $1 - \frac{1}{1+n} > 1 - \epsilon$, also kann $1 - \epsilon$ keine obere Schranke von B sein. Somit gilt $\sup B = 1$.

Mit $b_n = \frac{-1+\frac{1}{n}}{1+(-1+\frac{1}{n})} = \frac{-1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -n + 1$ folgt, dass B nach unten unbeschränkt ist. B besitzt also kein Infimum.

Aufgabe G2 (Binomialkoeffizienten)
Beweisen Sie

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

(b)

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

Lösung:

(a) *Behauptung:* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Beweis: mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: $n = 0 : (x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} x^k y^{-k} \quad \checkmark$

Induktionsannahme: die Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\
&\overset{I.Ann.}{=} x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^{k+1} y^{n-(k+1)+1} + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] x^{k+1} y^{n-k} + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&\overset{a)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1} y^{n-k} + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}
\end{aligned}$$

(b) *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ gilt

$$\prod_{i=1}^{1} \frac{2i-1}{2i} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{1}{2^2} \binom{2}{1}.$$

Induktionsschluß: Für ein beliebiges aber festes n gelte $\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i} &= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \right) \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \\
&\overset{\text{IA}}{=} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \frac{2n+1}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \frac{2n+2}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{2^{2(n+1)}} \binom{2(n+1)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Konvergente Folgen)

(a) Sei $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Zeigen Sie mittels der Definition der Konvergenz von Folgen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Sei $b_n = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^m$. Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass 1 der Grenzwert der Folge ist. Sei daher $a = 1$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt $|a_n - a| = \frac{1}{n}$. Für $\epsilon > 0$ existiert nach dem Satz von Archimedes ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon > \frac{1}{n_0}$. Daher gilt für alle $n \geq n_0$

$$\epsilon > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n} = |a_n - a|.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen den Grenzwert 1.

(b) Mit Hilfe von G2b) vom 2.Übungsblatt wissen wir, dass

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Wir betrachten also $b_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ und zeigen, dass der Grenzwert 2 ist. Sei also $b = 2$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt $|b_n - b| = \frac{1}{2^n}$. Für $\epsilon > 0$ existiert nach dem Satz von Archimedes ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon > \frac{1}{2^{n_0}}$. Daher gilt für alle $n \geq n_0$

$$\epsilon > \frac{1}{2^{n_0}} > \frac{1}{2^n} = |b_n - b|.$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen den Grenzwert 2.

Hausübung

Aufgabe H1 (Natürliche Zahlen)

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ gilt $2n + 1 < n^2$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ gilt $2^n < n!$

Lösung:

(a) *Behauptung:* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: \quad 2n + 1 < n^2$

Induktionsanfang: $n = 3$: $2 \cdot 3 + 1 < 3^2 \quad \surd$

Induktionsannahme: $\exists n \in \mathbb{N}, n: \quad 2n + 1 < n^2$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 2(n+1) + 1 &= 2n + 2 + 1 \\ &= 2n + 1 + 2 \\ &\overset{I.A.}{<} n^2 + 2 \\ &< (n+1)^2. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, was ebenfalls per Induktion gezeigt werden kann.

(b) *Behauptung:* $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 3: \quad n^2 \leq 2^n$ Wir beobachten zunächst, dass die Aussage für $n = 1, 2$ gilt und zeigen die Aussage für $n \geq 4$ per Induktion.

Induktionsanfang: $n = 4$: $4^2 \leq 2^4 \quad \surd$

Induktionsannahme: $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : n^2 \leq 2^n$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\overset{a)}{<} n^2 + n^2 \\ &= 2 \cdot n^2 \\ &\overset{I.A.}{<} 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1}, \end{aligned}$$

also $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. Per Induktion folgt nun $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \neq 3$.

(c) *Behauptung:* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: \quad 2^n < n!$
Induktionsanfang: $n = 4$: $16 = 2^4 < 4! = 24 \quad \checkmark$
Induktionsannahme: $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 4: 2^n < n!$
Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\overset{I.A.}{<} 2 \cdot n! \\ &< (n+1) \cdot n! \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Funktionen)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

(a)
$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \; g(x) = x^2$$

(b)
$$h : (-1, \infty) \to (-\infty, 1), \; h(x) = \frac{x}{x+1}$$

(c)
$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; k(x) = \begin{cases} x & : x < 1 \\ (x-1)^2 + 1 & : x \geq 1 \end{cases}$$

Lösung:

(a) Die Funktion g ist weder injektiv noch surjektiv. Zum Beispiel gilt $g(-2) = 4 = g(2)$, was die Injektivität widerlegt. Auch gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, da aber die Wurzel eindeutig bestimmt ist, kann daher 2 nicht im Bild von g liegen. Das bedeutet aber, dass g nicht surjektiv ist.

(b) *Behauptung:* Die Funktion h ist bijektiv.
Beweis der Injektivität: Seien $x, x' \in (-1, \infty)$ mit $h(x) = h(x')$. Dann gilt

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x'}{x'+1} \Rightarrow x(x'+1) = x'(x+1) \Rightarrow x = x'.$$

Beweis der Surjektivität: Sei $y \in (-\infty, 1)$, dann ist $x := \frac{y}{1-y}$ das Urbild von y, denn

$$h(x) = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y}{1-y} + 1} = \frac{y}{1-y}(1-y) = y.$$

Die Umkehrabbildung ist daher auch gegeben durch

$$h^{-1} : (-\infty, 1) \to (-1, \infty), \; h^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

(c) *Behauptung:* Die Funktion k ist bijektiv.
Beweis der Injektivität: Seien $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $k(x) = k(x')$. Falls $x, x' < 1$, folgt sofort $x = x'$. Falls $x, x' \geq 1$, folgt $x = x'$ wegen

$$(x-1)^2 + 1 = (x'-1)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = (x'-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = x' - 1.$$

Die Fälle $x < 1, x' \geq 1$ und $x' < 1, x \geq 1$ können nicht eintreten, da $k(x) < 1$, falls $x < 1$ und $k(x) \geq 1$, falls $x \geq 1$. Damit ist k injektiv.
Beweis der Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$. Ist $y < 1$, so ist $x = y$ das Urbild von y. Ist $y \geq 1$ so ist $x = \sqrt{y-1} + 1$ das Urbild von y. Die Umkehrfunktion von k ist daher gegeben durch

$$k^{-1}(x) = \begin{cases} x & : x < 1 \\ x = \sqrt{y-1} + 1 & : x \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabe H3 (Konvergente Folgen)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren:

(a)

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$$

(b)

$$b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Lösung:

(a) Zunächst beobachten wir, dass $a_n = \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} = n - 1$. Wir behaupten, dass a_n nicht konvergiert. Wir müssen also zeigen:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists \epsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0)|x - a_n| \geq \epsilon$$

Sei also $x \in \mathbb{R}$. Wir wählen $\epsilon = 1$. Sei außerdem $n_0 \in N$.

Da $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist (Satz von Archimedes) finden wir ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > n_0$ und $n > x + 2$, also $n - x - 1 > 1$.

Damit erhalten wir $|x - a_n| = |x - (n - 1)| = n - 1 - x \geq \epsilon$, was zu zeigen war.

(b) Wir behaupten, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Wir zeigen:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)|b_n - 0| < \epsilon$$

Wir bemerken zunächst, dass in einem vollständig geordneten Körper gilt

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x^2 < y^2 \text{ und } \frac{1}{x^2} > \frac{1}{y^2}.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Wir stellen fest, dass $|b_n| < \epsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon^2$. Da $\epsilon > 0$, finden wir nach dem Satz von Archimedes ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$. Sei nun $n > n_0$, also $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon^2$ und somit $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$ für all $n > n_0$, was zu zeigen war.