Analysis I für M, LaG/M, Ph
2.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
21.04.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Körperaxiome)
Beweisen Sie aus den Axiomen (A1)–(A9):

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Das additiv inverse Element zu a ist eindeutig, d.h. sind $b, c \in \mathbb{R}$ und gelten $a+b=0$, $a+c=0$, dann folgt $b=c$ (d.h. die Zuordnung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto$"additiv Inverses von a" ist eine Funktion. Dies rechtfertigt die Bezeichnung $-a$ für das additiv Inverse von a).

(b) $(-1) \cdot a = -a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(c) $-(-a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(d) $(-1)(-1) = 1$.

Notieren Sie jeweils, wo Sie welches Axiom bzw. schon bewiesene Aussagen benutzt haben.

Aufgabe G2 (Summenzeichen, Induktion)

(a) Formen Sie $6\sum_{j=2}^{10} \frac{1}{j} + 5\sum_{k=1}^{9} \frac{2}{k^2}$ in einen Ausdruck der Gestalt $\sum_{n=0}^{\cdots}(\ldots)$ um.

(b) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Aufgabe G3 (Umgekehrte Dreiecksungleichung)
Beweisen Sie Satz 2.8 (g) aus der Vorlesung: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| .$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Anordnungsaxiome)
Beweisen Sie aus den Axiomen (A1)–(A14):

(a) Für $a \in \mathbb{R}$ folgt aus $a \leq 0$, dass $-a \geq 0$.

(b) Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ und gilt $a \leq b$ und $c \leq 0$, so ist $ac \geq bc$.

(c) $1 > 0$.

(d) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $a^2 \geq 0$.

Aufgabe H2 (Ungleichungen)
Beweisen Sie und nennen Sie die jeweils benutzten Anordnungsaxiome (die Rechenregeln für "+" und "·" können ohne Weiteres verwendet werden):

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Falls $x < y$, so gilt $x < \frac{x+y}{2} < y$.

(b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2, \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$

(c) Zu reellen Zahlen x, y mit $x < y$ gibt es eine reelle Zahl z, so dass $x < z < y$ gilt.

Aufgabe H3 (Induktion)
Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.