Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26.05.2010

Analysis I für M, LaG/M, Ph

Probeklausur mit Lösungshinweisen

Tragen Sie in die neben stehenden Zeilen Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** ein. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	12	10	10	60	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *(Taschen)rechner sind nicht zugelassen.*
- *Es sind beliebige* ***schriftliche Aufzeichnungen*** *zugelassen.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- *50 % der Gesamtpunkte reichen zum Bestehen der Klausur.*
- *Bitte legen Sie Ihren* ***Studierendenausweis*** *zusammen mit einem* ***Lichtbildausweis*** *zur Kontrolle bereit.*
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei X eine Menge und seien $f, g : X \to X$ Funktionen. Geben Sie einen Beweis für die folgende Implikation an.

$$g \circ f \text{ ist bijektiv} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist injektiv und } g \text{ ist surjektiv.}$$

LÖSUNG: *Behauptung:* $g \circ f$ ist bijektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv und g ist surjektiv.

Beweis: Wir nehmen an, dass f nicht injektiv ist. Dann gibt es $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ und $f(x) = f(x')$. Daraus folgt aber auch $g(f(x)) = g(f(x'))$, was im Widerspruch zur Injektivität von $g \circ f$ steht. Nehmen wir nun an, g sei nicht surjektiv. Dann gibt es ein $y \in X$, so dass $g(x) \neq y$ für alle $x \in X$. Damit kann aber auch $g \circ f$ nicht surjektiv sein, da $f(X) \subseteq X$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, wobei $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

LÖSUNG: Wir definieren zunächst $\alpha := \sup A$, $\beta := \sup B$. Seien nun $a \in A$, $b \in B$. Aus $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$ folgt $a + b \leq \alpha + \beta$, $\alpha + \beta$ ist also eine obere Schranke von $A + B$. $\alpha + \beta$ ist in der Tat die kleinste obere Schranke: Sei dazu $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl. Wir müssen zeigen, dass ein $x \in A + B$ existiert, so dass $(\alpha + \beta) - x < \epsilon$. Da α und β Suprema von A bzw B sind, existieren $\tilde{a} \in A$ mit $\tilde{a} > \alpha - \epsilon/2$ und $\tilde{b} \in B$ mit $\tilde{b} > \beta - \epsilon/2$. Setzen wir nun $x = \tilde{a} + \tilde{b} > (\alpha + \beta) - \epsilon$ folgt sofort, dass $\alpha + \beta$ das Supremum von $A + B$ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Entscheiden Sie für die nachstehenden Folgen, welche der 3 Eigenschaften „beschränkt", „konvergent" bzw. „divergent" jeweils vorliegen. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie auch den Grenzwert.

a)
$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3 - 1}$$

b)
$$b_n := \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$$

LÖSUNG: a) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(3-n)^3}{3n^3 - 1} \\ &= \frac{27 - 27n + 9n^2 - n^3}{3n^3 - 1} \\ &= \frac{\frac{27}{n^3} - \frac{27}{n^2} + \frac{9}{n} - 1}{3 - \frac{1}{n^3}} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Folge ist also konvergent mit Grenzwert $-\frac{1}{3}$.

b) Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2m, m \in \mathbb{N}$. Hier gilt

$$\begin{aligned} b_{2m} &= \frac{1+(2m)^2}{2+6m+(2m)^2} \\ &= \frac{1+4m^2}{2+6m+4m^2} \\ &= \frac{\frac{1}{m^2}+4}{\frac{2}{m^2}+\frac{6}{m}+4} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Teilfolge $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= \frac{1-(2m+1)^2}{2+3(2m+1)+(2m+1)^2} \\ &= \frac{-4m-4m^2}{6+10m+4m^2} \\ &= \frac{-\frac{4}{m}-4}{\frac{6}{m^2}+\frac{10}{m}+4} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1. \end{aligned}$$

Für $\epsilon > 0$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \in U_\epsilon(1) \cup U_\epsilon(-1)$ für $n \geq n_0$. Die Folge ist also beschränkt.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei $a_0 \in [0,1]$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei die rekursiv definierte Folge mit $a_{n+1} := \dfrac{a_n^2+2}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

LÖSUNG: Wir zeigen zuerst, dass die Folge zwischen 0 und 1 beschränkt ist. Zunächst gilt offensichtlich $a_n \geq 0$ für alle n. Wir zeigen per Induktion, dass außerdem $a_n \leq 1$ für alle n.

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung gilt $a_0 \leq 1$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq 1$.

Induktionsschritt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1+2}{3} = 1$$

Die Folge ist also beschränkt zwischen 0 und 1.

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge monoton wächst. Es gilt fur $a_n \leq 1$

$$0 \leq (a_n-1)^2 = a_n^2 - 2a_n + 1 - a_n + a_n \leq< a_n^2 - 3a_n + 2.$$

Somit gilt

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3} > a_n.$$

Die Folge wächst also monoton und ist nach oben beschränkt, nach dem Monotonie-Kriterium konvergiert die Folge also.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Folge

$$a_n := \begin{cases} (-1)^n & \text{wenn } n = m^2, \\ \dfrac{m^2}{1+2n} & \text{für } m^2 < n < (m+1)^2, \quad m \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?
b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?
c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
d) Geben Sie Teilfolgen an, die gegen die Häufungspunkte konvergieren.

LÖSUNG: a) Im ersten Fall nehmen die Folgenglieder nur die Werte ± 1 an. Im zweiten Fall gilt

$$0 < \frac{m^2}{1+2n} < \frac{n}{1+2n} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Die Folge ist also beschränkt.

b) Die Folge ist nicht konvergent, da die Menge $\{n = m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ nicht endlich ist und die entsprechende Teilfolge abwechselnd die Werte 1 und -1 annimmt.

c) Aus dem ersten Fall ergeben sich die Häufungswerte 1 und -1. Für den zweiten Fall wissen wir bereits, dass $\frac{m^2}{1+2n} < \frac{1}{2}$. Außerdem gilt

$$\frac{m^2}{1+2n} > \frac{m^2}{1+2(m+1)^2} = \frac{m^2}{3+2m^2+4m} = \frac{1}{\frac{3}{m^2}+2+\frac{4}{m}} \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{2}$$

Wir haben also für diese Teilfolge eine identische obere und Schranke, die Teilfolge konvergiert dementsprechend nach Satz 7.8 f) gegen $\frac{1}{2}$. Eine Argumentation wie in Beispiel 10.7 im Skript zeigt, dass es keine weiteren Häufungspunkte geben kann.

d) Die Teilfolge (a_k) mit $k \in \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade und } n = m^2, m \in \mathbb{N}\}$ konvergiert gegen 1, die Teilfolge (a_k) mit $k \in \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ungerade und } n = m^2, m \in \mathbb{N}\}$ konvergiert gegen -1, und schließlich konvergiert die Teilfolge (a_k) mit $k \in \{n \in \mathbb{N} : m^2 < n < (m+1)^2, m \in N\}$ gegen $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen reicht als Antwort „richtig", bei falschen Aussagen geben Sie eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| < \epsilon \quad \text{für alle } n > n_0,$$

so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

b) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ folgt $\lim_{n\to\infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b)$.

c) Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

d) Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.

LÖSUNG: a) Falsch. Sei $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da aber $\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ gilt, konvergiert die Folge nicht und ist somit insbesondere keine Cauchy-Folge (Cauchy-Kriterium).

b) Richtig.

c) Richtig.

d) Falsch. Zum Beispiel konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ konvergiert absolut, die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ ist aber keine positive Nullfolge.