Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26.05.2010

Analysis I für M, LaG/M, Ph

Probeklausur

Tragen Sie in die neben stehenden Zeilen Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** ein. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ________________

Vorname: ________________

Matrikelnummer: ________________

Fachrichtung: ________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	12	10	10	60	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *(Taschen)rechner sind nicht zugelassen.*
- *Es sind beliebige* ***schriftliche Aufzeichnungen*** *zugelassen.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- *50 % der Gesamtpunkte reichen zum Bestehen der Klausur.*
- *Bitte legen Sie Ihren* ***Studierendenausweis*** *zusammen mit einem* ***Lichtbildausweis*** *zur Kontrolle bereit.*
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei X eine Menge und seien $f, g : X \to X$ Funktionen. Geben Sie einen Beweis für die folgende Implikation an.

$$g \circ f \text{ ist bijektiv} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist injektiv und } g \text{ ist surjektiv.}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, wobei $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Entscheiden Sie für die nachstehenden Folgen, welche der 3 Eigenschaften „beschränkt", „konvergent" bzw. „divergent" jeweils vorliegen. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie auch den Grenzwert.

a)

$$a_n := \frac{(3 - n)^3}{3n^3 - 1}$$

b)

$$b_n := \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$$

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei $a_0 \in [0, 1]$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei die rekursiv definierte Folge mit $a_{n+1} := \dfrac{a_n^2 + 2}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Folge

$$a_n := \begin{cases} (-1)^n & \text{wenn } n = m^2, \\ \dfrac{m^2}{1 + 2n} & \text{für } m^2 < n < (m + 1)^2, \quad m \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

a) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt?
b) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent?
c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
d) Geben Sie Teilfolgen an, die gegen die Häufungspunkte konvergieren.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen reicht als Antwort „richtig", bei falschen Aussagen geben Sie eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| < \epsilon \quad \text{für alle } n > n_0,$$

so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

b) Aus $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ folgt $\lim_{n \to \infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b)$.

c) Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

d) Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.