Analysis I für M, LaG/M, Ph
OWO-Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

SS 2010
07.04.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Der Osterhase möchte von der Insel Arbegla zur Insel Sisylana reisen um seine Eier zu verteilen. Leider ist das Meer bereits wieder aufgetaut, so dass er die Strecke nicht zu Fuß zurücklegen kann. Allerdings besteht die Hoffnung eine Brücke zu bauen. Beide Inseln haben einen praktisch unbegrenzten Vorrat an Backsteinen, mehr als man jemals zählen könnte (aus irgendwelchen Gründen nennen Mathematiker solche Vorräte *abzählbar*).
Die Idee ist nun die Backsteine in zwei geneigte Türme aufzustapeln, ein Backstein pro Schicht. Da kein Mörtel vorhanden ist um die Steine zusammenzuhalten, müssen sie durch ihr eigenes Gewicht stabilisiert werden. Der Schwerpunkt des obersten Backsteines muss sich vertikal über dem zweithöchsten Stein befinden, der gemeinsame Schwerpunkt der beiden obersten Steine vertikal über dem dritten Backstein, usw. Kann eine solche Brücke beliebig große Distanzen überbrücken?

Lösung:
Es ist hilfreich von oben nach unten zu zählen. Sei x_k die horizontale Position des Schwerpunkts von Backstein k, von oben zählend und beginnend mit $x_1 = 0$. Der gemeinsame Schwerpunkt der obersten k Backsteine ist

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j.$$

Falls die Länge der Backsteine 2 beträgt wird der geneigte Turm stabil sein, wenn

$$x_{k+1} = \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) + 1 - \epsilon,$$

wobei wir einen Sicherheitsabstand $\epsilon \geq 0$ einplanen.
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1 - \epsilon \\
x_3 &= \frac{1}{2}(1-\epsilon) + 1 - \epsilon \\
&= (1-\epsilon)(1+\frac{1}{2}) \\
x_4 &= \frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3\right) + 1 - \epsilon = \frac{1}{3}\left(0 + 1 - \epsilon + (1-\epsilon)(1+\frac{1}{2})\right) + 1 - \epsilon \\
&= (1-\epsilon)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}),
\end{aligned}$$

und somit

$$x_{k+1} = (1-\epsilon)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$$

(kann per Induktion gezeigt werden).
Da die harmonische Reihe divergiert, kann ein solcher geneigter Turm eine beliebig große Distanz überbrücken.

Aufgabe G2

Zum Leidwesen der Mathematiker ist der Bau der Brücke aus unerheblichen praktischen Gründen gescheitert. Stattdessen haben es die Bewohner geschafft, ein Seil zwischen beiden Inseln zu spannen, an dem sich nun der Osterhase entlang hangeln möchte. Das Seil hat eine Länge von $10km$. Alle 10 Meter hält der Osterhase an um zu verschnaufen. Ein paar ungezogene Bengel auf Arbegla nutzen diese Pausen um das Seil, das aus einem beliebig dehnbarem Gummi besteht, in die Länge zu ziehen, jedes Mal um weitere $10km$. Hat der Osterhase eine Chance, nach Sisylana zu kommen?

Lösung:

Wenn der Osterhase zum n-ten Mal startet, beträgt die Länge des Seils $n \cdot 10^4 m$. Der Bruchteil des Seils, um den er sich beim n-ten Mal voranbewegt, ist also

$$\frac{10m}{n \cdot 10^4 m} = \frac{1}{1000n}.$$

Wenn der Osterhase zum n-ten Mal anhält um zu verschnaufen ist der Bruchteil des Seils, der bereits hinter ihm liegt, somit

$$\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Falls N also die kleinste natürliche Zahl ist, für die $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq 1000$ gilt, wird der Osterhase die Insel Sisylana nach N Schritten erreichen.

Mittels Integralrechnung lässt sich leicht zeigen, dass

$$7.24 \cdot 10^{433} \leq N \leq 1.97 \cdot 10^{434}.$$