Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
M.Sc. Franziska Kartzow

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
15. April 2010

2. Tutoriumsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Das Schubfachprinzip (manchmal auch Taubenschlagprinzip bzw. pigdeonhole principle genannt) ist ein grundlegendes Prinzip der Mathematik. Die Aussage des Schubfachprinzips lautet:

> **Schubfachprinzip:** Wenn man m Objekte auf n Mengen aufteilt und $m > n$ ist, so gibt es mindestens eine Menge, die mindestens zwei Objekte enthält.

Aufgabe G1 (Schubfachprinzip)
Unter je sechs natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.

Aufgabe G2 (Schubfachprinzip)

(a) Zeigen Sie die folgende Aussage: In jeder Gruppe von mindestens zwei Personen gibt es zwei, die die gleiche Anzahl von Bekannten innerhalb dieser Gruppe haben. Hierbei ist “bekannt sein” eine symmetrische Relation, d.h. wenn Person X Person Y kennt, dann kennt auch Person Y Person X.

(b) Wir wählen 55 Zahlen aus der Menge $\{1, 2, ..., 99, 100\}$ aus. Zeigen Sie, dass es unter den 55 Zahlen ein Paar gibt, dessen Differenz 9 ist, ein Paar, dessen Differenz 10 ist, ein Paar dessen Differenz 12 ist und ein Paar dessen Differenz 13 ist. Zeigen Sie außerdem, dass man 55 Zahlen auswählen kann, so dass keine zwei Zahlen eine Differenz von 11 haben.

(c) *Zusatzaufgabe:*
Ein Schachmeister möchte sich auf ein Tournament, das in 11 Wochen stattfindet, vorbereiten. Dazu möchte er jeden Tag mindestens 1 Spiel spielen. Um sich jedoch nicht völlig zu verausgaben, begrenzt er die Anzahl der Trainingsspiele pro Kalenderwoche auf 12. Zeigen Sie, dass es eine Folge von aufeinanderfolgenden Tag gibt, an denen der Schachmeister genau 21 Trainingsspiele spielt.

Das Inklusion-Exklusion Prinzip (manchmal auch Siebformel genannt) ist wie das Schubfachprinzip eine wichtige kombinatorische Beweismethode. Mithilfe dieser Technik kann man die Kardinalität, also die Anzahl der Elemente einer Menge, bestimmen. Die Mächtigkeit einer Ursprungsmenge X wird dabei durch die Mächtigkeiten ihrer Teilmengen ausgedrückt.

Aufgabe G3 (Inklusion-Exklusion)
In einer Stadt gibt es drei Vereine. Der Tennisclub hat 20 Mitglieder, die Briefmarkengruppe 15 und der Kleintierzüchterverein 8. Zwei der Tennisspieler und drei Briefmarkensammler züchten

auch Kleintiere, sechs Einwohner spielen Tennis und sammeln Briefmarken, und ein ganz besonders eifriger Mensch engagiert sich in allen drei Vereinen. Wie viele Menschen sind insgesamt am Vereinsleben beteiligt?
Hinweis: Die Mächtigkeit der Vereinigung zweier Mengen A und B ist gegeben durch $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Aufgabe G4 (Inklusion-Exklusionsprinzip)
Es findet eine Vorlesung für Erstsemester statt. 18 Erstsemester sind für Physik und 23 für Mathematik bzw. für Informatik eingeschrieben. Die Anzahl der Studierenden, die sowohl für Mathematik als auch für Physik eingeschrieben sind, beträgt 9. Es gibt 7 Vorlesungsbesucher, die Physik und Informatik studieren. 4 Leute sind sogar für alle drei Studiengänge immatrikuliert. Es ist klar, dass jeder der Vorlesungsbesucher entweder Mathe oder Physik oder Informatik studiert.

(a) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Anzahl der Erstsemester durch die Informationen nicht eindeutig ist.

(b) Wieviele Erstsemester sind mindestens bzw. höchstens in der Vorlesung?