Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2010
02.07.2010

Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

11.Übung

Präsenzaufgaben

G1 (Partielle Ableitungen)

Bestimme alle Ableitungen bis zur 3. Ordnung der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2y^3 + 4z^2 + 2\ .$$

Gib ihren Gradienten und ihre Hesse-Matrix an.

G2 (Kettenregel)

Berechne die Ableitung $\frac{dh}{dt}$ der Funktion $h(t) = f(G(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \arctan(x^3 + y), \quad G(t) = (e^{2t}, t^2)^T\ ,$$

und zwar einmal mittels Kettenregel, ein weiteres mal direkt nach Einsetzen von G in f.

G3 (Ableitungen)

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ eine 3×3-Matrix , $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ und $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen

i) $F_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F_1(X) = A^T X$ ii) $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_2(X) = X^T A X$

iii) $f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_3(X) = ||X - p||^\alpha$ iv) $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F_4(x,y,z) = (x,y) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

G4 (Das elektrische Feld)

Das Potential des elektrischen Feldes einer Punktladung Q im Punkt $X_0 \in \mathbb{R}^2$ ist $P(X) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ||X - X_0||}$ für $X \in \mathbb{R}^3$ (wobei ϵ_0 die elektrische Feldkonstante des entsprechenden Mediums ist). Die elektrische Feldstärke $E(X)$ im Punkt $X \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als $E(X) = -\mathrm{grad}\, P(X)$.

i) Berechne $E(X)$.

ii) Skizziere das Vektorfeld $E \colon R^3 \to \mathbb{R}^3,\ X \mapsto E(X)$.

Hausaufgaben

H1 (Differentiation) **(3 Punkte)**

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$ gegeben.

Zeige, daß f stetig in 0 ist, daß die partiellen Ableitungen nach x und y auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren, daß aber f nicht differenzierbar in 0 ist.

H2 (Widerstände) **(3×1 Punkte)**

Schaltet man drei Widerstände R_1, R_2 und R_3 parallel, so ergibt sich der Gesamtwiderstand R aus der Gleichung $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Gegeben seien $R_1 = 200\Omega\ (\pm 1\%)$ sowie $R_2 = R_3 = 300\Omega\ (\pm 1\%)$.

i) Gib das vollständige Differential von R als Funktion von R_1, R_2 und R_3 an.

ii) Schätze mit Hilfe des vollständigen Differentials näherungsweise den Betrag des absoluten Fehlers von R ab.

iii) Wie groß ist in erster Näherung der maximale relative Fehler $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$?

H3 (Magnetfeld) **(1+2 Punkte)**

Sei e_1, e_2, e_3 eine Basis in $\mathbb{R}^3$. Ein gerader stromdurchflossener Draht habe die Richtung der e_3-Achse. Nach *Ampere* bildet sich das magnetische Feld $H(X) = \frac{c}{||X||^2-(e_3 \cdot X)^2} e_3 \times X$ für $(x_1, x_2) \neq 0$ und $c > 0$.

i) Skizziere das Vektorfeld $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ X \mapsto H(X)$.

ii) Bestimme die Funktionalmatrix von $H(x)$.

H4 (Funktionaldeterminante) **(1+2+2+1 Punkte)**

> Die Volumenverzerrung einer linearen Abbildung ist über die Determinante gegeben. Um dies auf weitere Funktionen zu verallgemeinern, behilft man sich mit einem mathematischen Klassiker: Man linearisiert die Abbildung lokal, d.h., man nimmt an, die Abbildung sei in einer hinreichend kleinen Umgebung durch eine lineare Abbildung zu approximieren. Für diese Umgebung läßt sich nun der Zerrfaktor der Abbildung durch den Zerrfaktor der Linearisierung berechnen. In der Analysis lernt man, dass diese Linearisierung durch die Funktionalmatrix gegeben ist. Sei $f\colon\ D \subseteq \mathbb{R}^n \to F \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann kann man die Funktionalmatrix und die Funktionaldeterminante bestimmen; der Zerrfaktor ist jetzt natürlich von dem Punkt X abhängig, an dem die partiellen Ableitungen ausgewertet werden.

i) Bestimme die Funktionalmatrix einer linearen Abbildung $f\colon\ \mathbb{R}^n \to R^n$ im Punkt X.

ii) Bestimme Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante der Abbildung

$$f\colon\ ]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2,\ (r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi)$$

im Punkt X (Transformation in Polarkoordinaten).

iii) Bestimme Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante der Abbildung

$$f:]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3,\ (r,\theta,\phi) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi).$$

im Punkt X (Transformation in Kugelkoordinaten).

iv) Im Bronsteins Taschenbuch der Mathematik findet sich folgende Formel:

$$\int_V dV = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi$$

Deute diese Formel. Was bezeichnet V?