Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2010
24.06.2010

Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

10.Übung

Präsenzaufgaben

G1 i) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, genau dann wenn sie

$*$ offen und beschränkt ist. $*$ abgeschlossen und beschränkt ist.
$*$ offen und abgeschlossen ist. $*$ offen, abgeschlossen und beschränkt ist.

ii) Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \supseteq M \to \mathbb{R}$ nimmt auf M ihr Maximum an, falls M

$*$ abgeschlossen ist. $*$ beschränkt ist. $*$ kompakt ist.

G2 i) Skizziere die Menge $M := \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Bestimme die Menge und ihre Häufungspunkte. Ist M offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt?

ii) Skizziere die Menge $U := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 1 \,\}$. Ist U offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt?

G3 Finde jeweils eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) M ist offen und beschränkt.

(b) M ist abgeschlossen und unbeschränkt.

(c) M ist beschränkt, aber weder abgeschlossen noch offen.

(d) M ist offen und abgeschlossen.

G4 Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(X) = f(x, y) := \exp(-x^2 - y^2) = e^{-\|X\|^2} .$$

(a) Skizziere den Graphen von f, d.h. die von $(x, y, f(x, y))$ erzeugte Fläche im $\mathbb{R}^3$.

(b) Skizziere einige der Höhenlinie $H_c = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c \,\}$ für $c \in \mathbb{R}$.

(c) Skizziere den Schnitt für $x = 0$ und den Schnitt für $y = 0$.

G5 Visualisiere die folgenden Funktionen (ggf. mit Hilfe eines PCs)? Kannst die Funktionen auch von Hand entsprechend darstellen?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f_1(t) := (4\cos t,\ 4\sin t)$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f_2(t) := (\cos t, \sin t, t)$,

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_3(x, y) := (\frac{1}{2}y,\ -\frac{1}{2}x)$,

(d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_4(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Bestimme alle möglichen Verkettungen $f_i \circ f_j$ der Funktionen.

Hausaufgaben

H1 (5×1 **Punkte)**

Betrachte die beiden 2π-periodischen Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} 0, & x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

i) Skizziere die Funktionen f und g.

ii) Sind die Funktionen f, g stetig, stückweise stetig und stückweise glatt?

iii) Bestimme die Fourierreihe von f und g.

iv) Vergleiche die beiden Fourierreihen. Stimmen die Fourierreihen mit den Funktionen f und g überein? Erkläre deine Beobachtungen.

v) Bestimme ein Intervall, auf dem die Fourierreihe von g gleichmäßig gegen g konvergiert.

H2 ($2+2$ **Punkte)**

Betrachte die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad g(x,y) := \frac{\sin(x)y^2}{x^2+y^4} .$$

Beide Funktionen sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$.

(a) Wie kannst Du $f(0,0)$ definieren, damit die fortgesetzte Funktion auf R^2 stetig ist?

(b) Zeige, daß die Funktion g durch keine Wahl für $g(0,0)$ zu einer stetigen Funktion fortsetzen werden kann. Betrachte dazu geeignete Folgen (x_n, y_n) mit $(x_n, y_n) \to (0,0)$.

H3 (2 **Punkte)**

Betrachte die linearen Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} 3x + y \\ -2x + 5y \end{pmatrix} .$$

Bestimme die Umkehrfunktion F^{-1}.

Hinweis: Das Problem lässt sich in Matrixschreibweise formulieren.

H4 (3×1 **Punkte)**

Gegeben sei das Temperaturfeld $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $T(x,y) := x^2 + 4y^2$.

(a) Skizziere einige der Höhenlinien von T (Isothermen).

(b) Skizziere den Graphen von T.

(c) Betrachte ein Teilchen auf der spiralförmigen Bahn $X(t) := (t \cdot \cos t,\ t \cdot \sin t)$. Wie sieht der Temperaturverlauf für dieses Teilchen aus?