Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS09
17.06.2010

Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

9. Übung

Präsenzaufgaben

G1 (Periodische Funktionen)

i) Die Funktion $f(x) = \cos(4\pi x + 2)$ hat die Periodenlänge

☐ 4π ☐ 4 ☐ 2 ☐ $\frac{1}{4\pi}$ ☐ $\frac{1}{2}$.

ii) Die Fourier-Reihe einer geraden Funktionen ist eine

☐ reine Sinusreihe ☐ reine Kosinusreihe ☐ Reihe mit Sinus- und Kosinustermen .

iii) Ist f periodisch mit der Periode 2π und auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar bis auf eine Unstetigkeitsstelle $x_0 \in (0, 2\pi)$, so konvergiert ihre Fourier-Reihe in x_0 gegen

☐ $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ ☐ $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ ☐ $\frac{1}{2}\left\{\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) + \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)\right\}$ ☐ $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

G2 (Fourier-Entwicklung)

Gegeben sei die Funktion $\tilde{f}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = |\sin x|$.

i) Setze $\tilde{f}$ periodisch auf $\mathbb{R}$ zu der Funktion f fort und skizziere f.

ii) Bestimme die Fourier-Reihe der Funktion f.

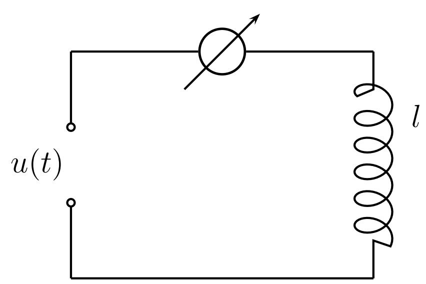
G3 (Schaltkreis zum analogen Integrieren)

Der skizzierte Schaltkreis besteht aus einer Spannungsquelle mit zeitabhängiger Spannung $u(t)$, einem Strommessgerät und einer Spule mit der Induktivität l. Es sei $i(t)$ die gemessene Stromstärke. Experimentell wird folgender Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke festgestellt:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow i(t) = \frac{u_0}{\omega l} \sin \omega t \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R} .$$

Gegeben sei der L-periodische Spannungsverlauf

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & |t| \le \frac{L}{4} \\ -u_0, & \frac{L}{4} < |t| \le \frac{L}{2} \end{cases}$$



i) Skizziere $u(t)$.

ii) Entwickele $u(t)$ in eine Fourier-Reihe.

iii) Gib $i(t)$ in einer Fourierdarstellung an. Benutzen Sie dabei obige Gesetzmäßigkeit.

Hausaufgaben

H1 (Schaltkreis zum analogen Integrieren) (2+2 Punkte)

Zurück zu Aufgabe G3: Seien $u_0 = 240V,\ l = 10mH$ und $L = 1ms$.

i) Gib für diesen Fall die Fourier-Reihe von $u(t)$ und $i(t)$ an.

ii) Skizziere $i(t)$ näherungsweise. Verwende hierzu einen Computer! Wie könnte $i(t)$ aussehen? Skizziere $i(t)$.

H2 (Differenziation & Integration) (2+2 Punkte)

i) Sei f eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Bestimme die Fourier-Reihe ihrer Ableitung $f'(x)$ aus der Fourier-Reihe von f.

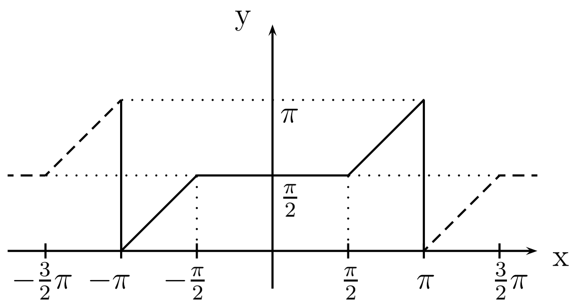
ii) Sei f eine integrierbare, 2π-periodische Funktion. Für welche Werte des Fourierkoeffizienten a_0 ist die Funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

wieder in eine Fourier-Reihe entwickelbar?

H3 (Fourier-Entwicklung I) (1+1+2+1 Punkte)

Die 2π-periodische Funktion f sei durch die folgende Skizze gegeben.



i) Skizziere die Funktion $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}$.

ii) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion $\tilde{f}$?

iii) Bestimme die Fourier-Reihe der Funktion $\tilde{f}$.

iv) Bestimme die Fourier-Reihe der Funktion f mit Hilfe Ihres Resultats aus iii).

H4 (Fourier-Entwicklung II) (1+1 Punkte)

Bestimme (mit höchstens vier Zeilen Rechnung) die Fourier-Reihen der Funktionen

$$f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

Hinweis: Es gelten $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.