Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
11.06.2010

Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

8. Übung

Präsenzaufgaben

G1 (Taylorreihen I)

i) Berechne die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

ii) Bestimme nun die Taylorreihen der Funktionen $g(x) = \frac{x}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ mithilfe deines Resultats aus i), ohne erneut die Taylorformel anzuwenden.

G2 (Taylorreihen II)

Bestimme jeweils die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt x_0:

i) $f(x) = (x-1)^3 - x^2 + 2x - 1$ mit $x_0 = 1$,

ii) $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$ mit $x_0 = 0$,

iii) $f(x) = e^{2(5-x)^3}$ mit $x_0 = 5$,

iv) $f(x) = \sin(2x - \pi) + \cos((x - \frac{1}{2}\pi)^3)$ mit $x_0 = \frac{1}{2}\pi$.

G3 (Taylorentwicklung und Integration)

Bestimme das folgende Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

durch Integration des entsprechenden Taylorpolynoms bis auf einen maximalen Fehler von 10^{-2}.

G4 (Taylorentwicklung und Grenzwerte)

Bestimme folgende Grenzwerte ohne Verwendung der Regel von l'Hospital:

$$\text{i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \text{ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{3\sin^2(x)} \qquad \text{iii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\ln(1 + x^3)}\ .$$

Berechne zum Vergleich den letzten Grenzwert mit der Regel von l'Hospital.

Hausaufgaben

H1 (Taylorreihen) **(3 Punkte)**

Berechne die Taylorpolynome durch Verwendung bekannter Taylorreihen:

i) $T_5(\frac{1}{\cos x})$ mit $x_0 = 0$ ii) $T_3(e^{\sin x})$ mit $x_0 = 0$ iii) $T_4(\cos(\ln(1+x)))$ mit $x_0 = 0$.

H2 (Taylorentwicklung und Extrema) **(2+2 Punkte)**

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \ln(1 + x^2) + \cos(\alpha x)$$

mit einem reellen Parameter α.

i) Berechne $T_5(f(x))$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

ii) Untersuche f in x_0 auf ein lokales Extremum in Abhängigkeit von α. Unterscheide dabei für α drei Fälle!

H3 (Das mathematische Pendel) **(1+2+1 Punkte)**

Gesucht ist eine ungerade differenzierbare Funktion $u(t)$ mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$. Die Funktion $u(t)$ soll näherungsweise durch den Potenzreihenansatz

$$u(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_5 t^5 + O(t^6)$$

angegeben werden.

i) Welche Koeffizienten der Potenzreihe sind dann bereits bestimmt?

Zusätzlich wird von der Funktion $u(t)$ verlangt, dass sie der folgenden Gleichung genügt:

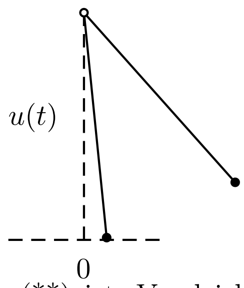
$$u''(t) = -\sin u(t) \ . \qquad (*)$$

ii) Ermittle die verbleibenden Koeffizienten (bis einschließlich a_5) durch Einsetzen des Ansatzes jeweils in die linke und rechte Seite der Differentialgleichung und anschließenden Koeffizientenvergleich. Welcher Satz aus der Vorlesung rechtfertigt die Methode des Koeffizientenvergleichs?

Die Gleichung (*) beschreibt ein mathematisches Pendel. Da $\sin x = O(x)$ kann man sich für kleine Auslenkungen des Pendels um den Nullpunkt statt mit Lösungen der Gleichung (*) mit Lösungen der *linearisierten* Gleichung

$$u''(t) = -u(t) \qquad (**)$$

zufrieden geben.



iii) Zeige, dass $u_{lin}(t) = \sin t$ eine Lösung der *linearisierten* Gleichung (**) ist. Vergleiche diese Näherung mit deinem Resultat aus ii) und der Taylorentwicklung der Sinusfunktion. Liefert diese Vorgehensweise bei kleinen Auslenkungen tatsächlich eine zufriedenstellende Lösung?