Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
4. Juni 2010

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvergenz von Potenzreihen)

Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n 2^n \cdot (x-2)^n$,

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(x-1)^{5k}$.

Lösung:

(a) Zunächst beobachten wir, dass gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$. Wir können nun den Konvergenzradius ρ mit dem Quotientenkriterium für Reihen bestimmen.

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(n+1)2^n}{n \cdot 2^{n+1}}\right| = \frac{n+1}{2n}.$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = 1/2$. Somit ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{2}$. Nun betrachten wir noch die Fälle $|x| = \frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{2}$: Da die Reihe für $x = \frac{1}{2}$ die harmonische Reihe ist, divergiert die Reihe.

$x = -\frac{1}{2}$: Da die Reihe für $x = -\frac{1}{2}$ die alternierende harmonische Reihe ist, konvergiert sie nach dem Satz vom Leibnitz.

(b) Wir gehen vor wie bei (a):

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|.$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, und damit ist der Konvergenzradius $\rho = 1$. Die Reihe konvergiert daher für alle $x \in]1,3[$ und divergiert für alle $x > 3$ und alle $x < 1$. Für $x \in \{1,3\}$ sehen wir, daß beide zugehörigen Reihen konvergent sind, da sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als Majorante haben. Die Reihe konvergiert also für alle $x \in [1,3]$.

(c) Berechnung des Konvergenzradius ρ:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n 2^n|} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \sqrt[n]{2^n} = 1 \cdot 2$$

Wir erhalten $\rho = \frac{1}{2}$. Die Potenzreihe konvergiert für $x \in (1.5, 2.5)$. Für $x = 1.5$ erhält man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (1.5-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$, die divergent ist. Bei der Randstelle $x = 2.5$ ist die Reihe ebenso $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (2.5-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$ divergent. Fazit: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x \in (1.5, 2.5)$.

(d) Mit $z = (x-1)^5$ schreibt sich die gegebene Reihe als $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} z^k$.

Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius dieser Reihe: Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

ist dieser $\frac{1}{2}$ nach dem Wurzelkriterium. Also konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x-1|^5 = |z| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad |x-1| < \tfrac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Der Konvergenzradius ist damit $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$. Fr die Randpunkte werden die entsprechenden Reihen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als Majorante haben. Daher konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in [1 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}}]$.

Aufgabe G2 (Potenzreihenentwicklung)

Bestimme die Potenzreihenentwicklungen um $x = 0$ für die Funktion $g(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Gib den Konvergenzradius der Reihe an.

Lösung:

Wir verwenden die bekannte Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + (-1)^k\right)\frac{x^k}{k!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}, \quad \text{wobei} \quad a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade} \\ & \text{für} \\ 2, & k \text{ gerade} \end{cases} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (\text{mit} \quad k = 2n \quad \text{für die geraden} \quad k) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}.
\end{aligned}$$

Da der Konvergenzradien von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ gleich ∞ sind ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ auch gleich ∞ nach Satz 26.2(i).

Aufgabe G3 (Taylor-Polynom)

Berechne das Taylorpolynom $T_3(x, 1)$ zu $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x - \ln x)$. Berechne ebenfalls $T_3(\frac{2}{3}, 1)$ und schätze den zugehörigen Fehler ab.

Lösung: Die ersten vier Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 2x - \ln(x) - 1, \\ f^{(2)}(x) &= 2 - \frac{1}{x}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{1}{x^2}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Mit $f(1) = 1$, $f^{(1)}(1) = 1$, $f^{(2)}(1) = 1$ und $f^{(3)}(1) = 1$ erhält man

$$T_3(x, 1) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

Insbesondere ergibt sich $T_3(\frac{2}{3}, 1) = \frac{58}{81}$.

Für den Fehler erhält man

$$R_3\,(2/3, 1) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{2}{3} - 1\right)^4 = -\frac{2}{4! \cdot \xi^3} \cdot \frac{1}{3^4}$$

mit $\xi \in]\frac{2}{3}, 1[$. Somit gilt

$$|R_3\,(2/3, 1)\,| \leq \frac{2}{4! \cdot (2/3)^3} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{1}{288}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenz von Potenzreihen)
(2+2+2 Punkte)
Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(k + \sin(k))(x-2)^k$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n}$.

Lösung:

(a) Es ist $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{k+\sin(k)}{k+1+\sin(k+1)}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{1+\frac{\sin(k)}{k}}{1+\frac{1}{k}+\frac{\sin(k+1)}{k}}\right|$.

$$\text{Da } -\tfrac{1}{k} \leq \tfrac{\sin(k)}{k} \leq \tfrac{1}{k}, \text{ gilt } \lim_{k\to\infty} \tfrac{\sin(k+1)}{k} = \lim_{k\to\infty} \tfrac{\sin(k)}{k} = 0,$$
$$\text{und damit } \lim_{k\to\infty} \left|\tfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \tfrac{1+0}{1+0+0} = 1.$$

Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium 1.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)\cdot 2}{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k+2}{k+1} = 4. \end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium 4.

(c) Konvergenzradius mit Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|1-\frac{1}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Also hat die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ den Konvergenzradius e, konvergiert also für alle $z \in (-e, e)$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{R}\backslash[-e, e]$. Mit $z = x^3$ konvergiert die ursprüngliche Reihe also für alle $x \in (-\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e})$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}\backslash[-\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e}]$.
Der Konvergenzradius ist daher $\sqrt[3]{e}$.

Aufgabe H2 (Konvergenz von Potenzreihen)
(**2+2 Punkte**)
Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (an^2+1)x^n$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \left(a^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{falls } |a| > 1 \\ 1 & \text{falls } |a| = 1 \\ 0 & \text{falls } |a| < 1. \end{cases}$$

Damit gilt für den Konvergenzradius

$$r = \begin{cases} 0 & \text{falls } |a| > 1 \\ 1 & \text{falls } |a| = 1 \\ \infty & \text{falls } |a| < 1. \end{cases}$$

(b) Es gilt

$$(an^2+1)^{\frac{1}{n}} = \exp \frac{\ln(an^2+1)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1,$$

da

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a\frac{1}{x^2}+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{a}{x^2}+1} \cdot \left(-\frac{a}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\frac{a}{x}+x} = 0$$

nach der Regel von de l'Hospital. Also ist der Konvergenzradius $r = 1$ unabhängig von a.

Aufgabe H3 (Potenzreihenentwicklung)
(**3 Punkte**)
Bestimme die Potenzreihenentwicklungen um $x = 0$ für die Funktion $h(x) = \frac{x^2+1}{3+2x^2}$. Gib den Konvergenzradius der Reihe an.

Lösung: Wir verwenden die bekannte Reihendarstellung der geometrischen Reihe.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x^2+1}{3+2x^2} = (x^2+1)\frac{1}{3(1+\frac{2}{3}x^2)} = \frac{x^2+1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{2}{3}x^2)} \\
&= \frac{x^2+1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}x^2\right)^k = (x^2+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}x^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{3^k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}x^{2k} \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-2)^{k-1}}{3^k} + \frac{(-2)^k}{3^{k+1}}\right)x^{2k} = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{3^k}\left(1+\frac{-2}{3}\right)x^{2k} \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{3^k}\frac{1}{3}x^{2k} = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{3^{k+1}}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^{2k} \qquad \text{mit} \quad q_k = \begin{cases} \frac{1}{3}, & k=0 \\ & \text{für} \\ \frac{(-2)^{k-1}}{3^{k+1}}, & k \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Obige Rechnung ist genau für die $x \in \mathbb{R}$ mit $\left|-\frac{2}{3}x^2\right| < 1$, also alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{3}{2}$ möglich. Der Konvergenzradius ist also $\frac{3}{2}$.

Aufgabe H4 (Taylor-Polynom)
(**2 Punkte**)
Bestimme für das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1$ die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Lösung:
Für $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
p^{(1)}(x) &= 4x^3 + 6x^2 + 8x + 1, \\
p^{(2)}(x) &= 12x^2 + 12x + 8, \\
p^{(3)}(x) &= 24x + 12, \\
p^{(4)}(x) &= 24, \\
p^{(5)}(x) &= 0,
\end{aligned}
$$

also $p(1) = 7$, $p^{(1)}(1) = 19$, $p^{(2)}(1) = 32$, $p^{(3)}(1) = 36$ und $p^{(4)}(1) = 24$.

Damit folgt $p(x) = 7 + 19(x-1) + 16(x-1)^2 + 6(x-1)^3 + (x-1)^4$.