Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
21. Mai 2010

5. Übungsblatt zur „Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenwert und Eigenvektor, diagonalähnliche Matrix)
Gegeben sei die diagonalähnliche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finde eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, so daß $D = T^{-1}AT$.

Lösung: Berechne zunächst die Eigenwerte von A.
Charakteristisches Polynom von A:

$$p_A(\lambda) = Det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 6 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -6 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2$$

Also sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 3$ die Eigenwerte von A.
Wir berechnen die zugehörigen Eigenvektoren.
Zunächst der Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also gilt $v_{12} = 0$ und $v_{11} = -v_{13}$, somit erhalten wir

$$v_1 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Für Eigenvektoren v_i zu $\lambda_{2,3}$ muß gelten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right), \quad \text{also} \quad 2v_{i2} + v_{i3} = 0$$

Wir wählen

$$v_2 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Seien nun

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Satz 13.8: $T^{-1}AT = D$.

Aufgabe G2 (Eigenwert und Eigenvektor, diagonalähnliche Matrix)
Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, gib eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so dass $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:
(a) Es gilt $\det(A - \lambda E) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2$, also $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(1 - \lambda)^2$.

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, als zugehörige Eigenvektoren berechnet man

$$v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix ist nicht diagonalähnlich. Eine Transformationsmatrix T mit den gewünschten Eigenschaften kann nicht gebildet werden. (Nur 2 Eigenvektoren vorhanden, 3 wären aber nötig, Satz 13.8.)

Aufgabe G3 (Quadratische Form)
Welche der folgenden Matrizen sind

(a) positiv definit,

(b) negativ definit,

(c) indefinit?

Begründe deine Antwort und gib im indefiniten Fall Vektoren an, die deine Behauptung belegen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach dem Satz 13.11 ist A_1 positiv definit. A_2 ist indefinit, denn $e_1^T A_2 e_1 = -4 < 0$, aber $e_2^T A_2 e_2 = 1 > 0$, und A_3 ist negativ definit, da $-A_3$ positive Eigenwerte hat.

Hausübung

Aufgabe H1 (Eigenwerttheorie)
(**0.5+1.5+3 Punkte**)
Zeige für $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

(a) A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind von Null verschieden.

(b) Ist A invertierbar, so gilt: λ ist ein Eigenwert von $A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von A^{-1}.

(c) λ ist ein Eigenwert von $A \Rightarrow \lambda^k$ ist ein Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$. (Hinweis: Beweis mittels vollständiger Induktion)

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von A.
A ist regulär $\Leftrightarrow$ Det(A)$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$
(vgl. Satz 11.4, Seite 129)

(b) Sei A regulär. Dann ist A invertierbar und alle Eigenwerte von A sind von Null verschieden (vgl. (a)).
Sei λ ein Eigenwert von A und x ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $Ax = \lambda x$. Dann gilt:

$$x = A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1} x$$

und somit

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x,$$

d.h. $\frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von A^{-1}.

(c) Sei λ Eigenwert von A und x ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $Ax = \lambda x$.
Wir zeigen:

$$A^k x = \lambda^k x \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

mittels vollständiger Induktion (dann ist λ^k Eigenwert von A^k mit Eigenvektor x).
Induktionsanfang, $k = 1$: Es gilt $Ax = \lambda x$ (s.o.).
Induktionsannahme für $k \in \mathbb{N}$: Es gelte $A^k x = \lambda^k x$.
Induktionsschritt:

$$A^{k+1}x = AA^k x = A\lambda^k x = \lambda^k Ax = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x$$

Aufgabe H2 (Diagonalisierbarkeit, quadratische Form)
(**2+3 Punkte**)
Mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

assoziiert.

(a) Gib die Matrix A an und entscheide, ob A positiv oder negativ definit ist.

(b) Begründe, warum die Matrix A diagonalähnlich ist und gib eine orthogonale Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ an, wobei $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix bildet.

Lösung:

(a) Die zur quadratischen Form Q_A gehörige Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, daß A positiv definit ist, genügt es nach Satz 13.11 auf S.152 nachzuweisen, daß die *Hauptunterdeterminanten* positiv sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(7) = 7 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38 > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162 > 0 \end{aligned}$$

und somit ist A *positiv definit.* Alternativ hätten wir (ebenfalls nach Satz 13.11) zeigen können, daß sämtliche Eigenwerte von A positiv sind. Das *charakteristische Polynom* von A besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (-1)^3 \cdot \det(A - \lambda I) \\ &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot [(7-\lambda)\cdot(6-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 4\cdot(7-\lambda) - 4\cdot(5-\lambda)] \\ &= \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 \\ &= (\lambda - 3)\cdot(\lambda - 6)\cdot(\lambda - 9) \end{aligned}$$

und somit erhalten wir die *Eigenwerte*

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9,$$

welche alle positiv sind.

(b) Da es sich bei A um eine *symmetrische* Matrix handelt, folgt mit Satz 13.10 die *Diagonalähnlichkeit* von A. Dieser Satz besagt außerdem, daß es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und ein Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D$$

gibt. Dabei sind die Diagonalelemente von D die Eigenwerte von A und die Spalten von S setzen sich aus den zugehörigen normierten Eigenvektoren zusammen. Da wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9,$$

im vorigen Aufgabenteil bereits bestimmt haben, ist nun noch für $i = 1, 2, 3$ zu jedem Eigenwert λ_i *ein* Eigenvektor x_i zu ermitteln. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

$\underline{\lambda_1 = 3}$: Hier ist *eine* Lösung des Gleichungssystems

$$(A - 3I) \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Der Vektor

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(A - 3I) \cdot x_1 = 0$ und ist somit *ein* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

$\underline{\lambda_2 = 6:}$ Zu betrachten ist das Gleichungssystem

$$(A - 6I) \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor

$$x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine ist Lösung von $(A - 6I) \cdot x_2 = 0$ und ist damit zugleich *ein* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$.

$\underline{\lambda_3 = 9:}$ In diesem Fall ist *eine* Lösung des Gleichungssystems

$$(A - 9I) \cdot x_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu ermitteln. Der Vektor

$$x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine ist Lösung von $(A - 9I) \cdot x_3 = 0$, die zugleich auch *einen* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 9$ darstellt.

Die Vektoren x_1, x_2 und x_3 sind zu einander orthogonal. Wir normieren sie und setzen in die Spalten der gesuchten Matrix S ein. Daher hat die gesuchte Transformationsmatrix die form

$$S := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

■

Aufgabe H3 (Quadratische Form)
(1+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die zu A gehörige quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Welche Voraussetzung muss A erfüllen, damit Q_A überhaupt sinnvoll erklärt ist?

(b) Wähle nun $b = 2$ und entscheide, für welche Werte der reellen Parameter a und c die Matrix A positiv definit ist.

(c) Zeige, daß A nicht negativ definit sein kann.

Lösung:

(a) Die quadratische Formen werden mit *symmetrischen Matrizen* assoziiert. Aus diesem Grund müssen wir zunächst

$$c = 3$$

voraussetzen. Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ b & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gehört dann die *quadratische Form* $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = ax_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 2bx_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

(b) Wir setzen $b = 2$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde bereits berücksichtigt, daß hier erneut $c = 3$ gewählt werden muß. Aufgrund von Satz 13.11 ist nun A genau dann positiv definit, wenn die führenden Hauptunterdeterminanten (*Hauptminoren*) von A positiv sind. Wegen

$$\begin{aligned}
D_1 &= \det(a) = a \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > 0 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8a - 4 \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > \frac{1}{2} \\
D_3 &= \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 32a - 48 \overset{!}{>} 0 && \Leftrightarrow \quad a > \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ist A für alle $a > \frac{3}{2}$ *positiv definit.*

(c) Um die Symmetrie der Matrix zu gewährleisten, müssen wir zuerst wieder $c = 3$ fordern. Nach Definition 13.6 ist die Matrix A negativ definit, wenn die Matrix

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b & -3 \\ -b & -8 & -4 \\ -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, was nach Satz 13.11 genau dann der Fall ist, wenn alle Hauptunterdeterminanten von $-A$ positiv sind. Nun gilt aber

$$D_1 = \det(-a) = -a \overset{!}{>} 0 \qquad \Leftrightarrow \quad a < 0$$

und

$$D_2 = \begin{vmatrix} \text{-a} & \text{-b} \\ \text{-b} & \text{-8} \end{vmatrix} = 8a - b^2 \overset{!}{>} 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 < 8a,$$

weshalb die Ungleichung

$$b^2 < 0$$

folgt, die für kein $b \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Somit können die Parameter a, b und c <u>*nicht*</u> so gewählt werden, daß A negativ definit ist.