Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010
14. Mai 2010

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gaußsches Eliminationsverfahren, Inverse Matrix)

Bestimme die Inverse A^{-1} der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Lösung: Die erweiterte Matrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III\to I,\ II+(-2)\cdot I,\ III+(-3)\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{III-2\cdot II}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{I+3\cdot III,\ II+(-3)\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{3\cdot I+5\cdot II}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -7 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{1/3\cdot I,\ -1/3\cdot II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Daher gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G2 (Cramersche Regel)

Bestimme mittels der Cramerschen Regel die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Lösung: Zunächst ist zu beachten, daß sich das Gleichungssystem in der Form

$$Ax = b$$

darstellen läßt, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} &= 4 \cdot 9 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \cdot 3 - 2 \cdot 9 \cdot 6 - 4 \cdot 6 \cdot 3 - 3 \cdot 8 \cdot 4 \\ &= 144 + 108 + 48 - 108 - 72 - 96 \\ &= 24 \neq 0 \end{aligned}$$

ist die quadratische Matrix A *invertierbar* und somit kann die Cramersche Regel (Satz 12.3, S.55 im Skript zur Linearen Algebra) angewandt werden. Zur Bestimmung des Lösungsvektors x werden die folgenden Determinanten benötigt:

$$\begin{aligned} \det(b, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -20, \\ \det(a_1, b, a_3) &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \\ \det(a_1, a_2, b) &= \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 16. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det A} = -\frac{20}{24} = -\frac{5}{6}, \\ x_2 &= \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det A} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}, \\ x_3 &= \frac{\det(a_1, a_2, b)}{\det A} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Lineare Gleichungssysteme)

Bestimme alle reellen k, so dass das lineare Gleichungssystem mit unbekannten x, y und z:

$$\begin{aligned} x - 3z &= -3 \\ 2x + ky - z &= -2 \\ x + 2y + kz &= 1 \end{aligned}$$

(a) eine eindeutige Lösung,

(b) keine Lösung,

(c) mehr als eine Lösung hat.

Lösung:

(a) Das System besitzt eine eindeutige Lösung, falls $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} \neq 0$ ist.

Es gilt $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & k & -1\\ 1 & 2 & k\end{pmatrix} = k^2+3k-10$. Da $k^2+3k-10=0$ gilt, hat das System für alle $k \neq -5$ und $k \neq 2$ eine eindeutige Lösung.

(b) Man setzt $x = -3-3z$ in die zweite und in die dritte Gleichung ein. Es gilt

$$\begin{aligned} 5z + ky &= 4\\ (3+k)z + 2y &= 4. \end{aligned}$$

Für $k=5$ gibt es keine Lösung des Systems. Sonst würde die Gleichung $-\frac{8}{5} = 4$ aus dem System folgen.

(c) Für $k=2$ gibt es mehrere Lösungen, da $z = (4-2y)/5$ das Gleichungssystem für alle $y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Gleichungssysteme)
(**2+2+1 Punkt**)
Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme eine Basis des Kerns von A und $\text{Rang}(A)$.

(b) Untersuche, ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1,2$ lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(c) Bestimme alle $b \in \mathbb{R}^3$, für die das LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

Lösung:

(a) Im $\text{Kern}(A)$ liegen alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = 0$, also

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0\\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ :2 \\ \cdot(-1)\end{matrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Damit ist $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Setze $x_2 = \lambda, x_3 = \mu$. Dann ist $x_1 = -2\lambda + \mu$:

$$\text{Kern}(A) = \left\{\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\text{Also ist } \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{eine Basis von } \text{Kern}(A) \text{ und } \dim(\text{Kern}(A)) = 2.$$

Wegen $n = 3 = \dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A)$ gilt damit $\text{Rang}(A) = 1$.

(b) Nach Satz 12.2 ist das LGS $Ax = b_i$ genau dann lösbar, wenn $\text{Rang}(A) = 1 = \text{Rang}(A, b_i)$ gilt. Bestimme $\text{Rang}(A, b_1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\text{Rang}(A, b_1) = 1$ und das LGS $Ax = b_1$ lösbar.
Bestimme $\text{Rang}(A, b_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\text{Rang}(A, b_2) = 2$ und das LGS $Ax = b_2$ nicht lösbar.

(c) Das LGS $Ax = b$ beistzt genau dann eine Lösung, wenn $b \in \text{Bild}(A)$ gilt. Da $\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A) = 1$ ist, und nach b $(1, 2, -1)^T \in \text{Bild}(A)$ ist, gilt $\text{Bild}(A) = \{\lambda(1, 2, -1)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b = \lambda(1, 2, -1)^T$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe H2 (Lineare Gleichungssysteme)
(**7 Punkte**)
Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.
Hinweis: Es sind drei verschiedene Fälle in Abhängigkeit vom Wert von α zu unterscheiden.
Empfehlung: Benutze den Gaußalgorithmus.

Lösung: Die erweiterte Systemmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & \alpha^2 & \alpha \end{array}\right) \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & \alpha^2 - 2 & \alpha - 3 \end{array}\right) \overset{III-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha - 1 \end{array}\right).$$

(2 Punkte)
Die Größe der Lösungsmenge hängt davon ab, ob der Ausdruck $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$ gleich Null ist oder nicht. Daher unterscheiden wir drei Fälle:
Für $\alpha = 1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich kann eine Variable frei gewählt werden. Sei $x_3 = s$. Dann folgt $2x_2 - x_3 = -2$ also $x_2 = \frac{s-2}{2}$. Weiter folgt $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$ also $x_1 = 3 - (s - 2) - 2s = 5 - 3s$. Daher gilt für die Lösungsmenge $L_{\alpha=1}$:

$$L_{\alpha=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - 3s \\ \frac{s-2}{2} \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

(2 Punkte)
Für $\alpha = -1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

In der letzten Zeile steht die nicht erfüllbare Gleichung $0 = -2$, womit die Lösungsmenge $L_{\alpha=-1}$ leer ist (1 Punkt).
Für $\alpha \neq \pm 1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{\alpha-1}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\alpha+1}, \\ 2x_2 - x_3 = -2 \qquad &\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2(\alpha+1)} - 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \qquad &\Rightarrow \quad x_1 = 5 - \frac{3}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt für die Lösungsmenge $L_{\alpha\neq\pm1}$:

$$L_{\alpha\neq\pm1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - \frac{3}{\alpha+1} \\ \frac{1}{2(\alpha+1)} - 1 \\ \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \right\}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe H3 (Cramersche Regel)
(3 Punkte)
Beweise die Cramersche Regel für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wenn $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $\det A \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^2,\ b \neq 0$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = & b_2. \end{cases}$$

Entweder a_{11} oder a_{21} ist ungleich Null, da $\det A \neq 0$ gilt. Nehmen wir an, dass $a_{11} \neq 0$ gilt. Dann folgt aus der ersten Gleichung $x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$. Einsetzen von x_1 in die zweite Gleichung und multiplizieren mit a_{11} ergibt $a_{21}b_1 - a_{12}x_2 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$. Daraus folgt, dass $x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\det A_2}{\det A}$. Einsetzen von x_2 in die Gleichung $x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$ ergibt $x_1 = \frac{b_1 a_{11}a_{22} - b_1 a_{21}a_{12} - b_2 a_{12}a_{11} + a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}\det A} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{\det A} = \frac{\det A_1}{\det A}$. Falls $a_{21} \neq 0$ und $a_{11} = 0$ ist, ist der Beweis analog. Wir drucken x_1 durch x_2 aus der zweiten Gleichung aus, setzen x_1 in die erste Gleichung ein und bekommen die Cramersche Formel für x_2. Danach setzen wir x_2 in die zweite Gleichung ein und bekommen Cramersche Formel für x_1.