Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
7. Mai 2010

3. Übungsblatt zur „Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Abbildungen)
Es sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ and $\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimme $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$.

Lösung: Es gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$, dann ist $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \phi(xe_1 + ye_2) = x\phi(e_1) + y\phi(e_2) = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$.

Aufgabe G2 (Matrizen)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne die Determinante von A.
b) Welchen Rang hat A?
c) Bestimme den Kern von A.
d) Bestimme, falls möglich, die Inverse von A.

Lösung: Es gilt $\det A = -3$, also $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und $\mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Zur Bestimmung der Inversen von A benutzen wir die Adjungierte A_{adj}:

$$A_{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{\mathrm{adj}} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Determinante)

Berechne für jedes $b \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist diese Matrix invertierbar?

Lösung: Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b \cdot b \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

$$= b^2(b^2-1) - (b^2-1) = (b^2-1)^2 = ((b+1)(b-1))^2 = (1+b)^2(1-b)^2.$$

Die Matrix B ist für alle $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ invertierbar, da in diesem Fall $\det(B) \neq 0$ gilt.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen)

Bestimme die Funktionsgleichungen der linearen Abbildungen, die zu den folgenden Matrizen gehören:

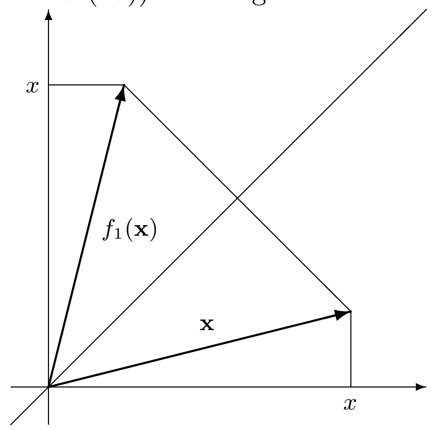
$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

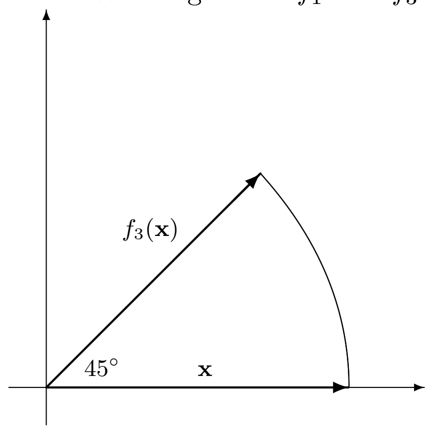
wobei λ und μ reelle Zahlen sind. Welche geometrische Bedeutung haben diese Abbildungen?

Lösung: Aus $f_k(\mathbf{x}) = A_k\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$ erhalten wir

$$f_1(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad f_2(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}, \quad f_3(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}, \quad f_4(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}.$$

Abbildung f_1 ist eine Spiegelung an der Geraden $\mathbf{x} = \lambda\binom{1}{1}$, Abbildung f_2 ist eine Streckung um den Faktor λ in x-Achsenrichtung und den Faktor μ in y-Achsenrichtung, Abbildung f_3 ist eine Drehung um 45° im Gegenuhrzeigersinn (Kapitel 10 (15)) und Abbildung f_4 ist eine Scherung (Kapitel 10 (15)). Die folgenden Abbildungen veranschaulichen die Wirkungen von f_1 und f_3.





Hausübung

Aufgabe H1 (Matrizen)
(1+2+1+1 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Welchen Wert hat die Determinante von A?

b) Bestimme den Rang von A.

c) Bestimme die Dimension des Bildes von A, die des Kerns von A und einen von 0 verschiedenen Vektor aus dem Kern von A.

d) Bestimmen, falls möglich, die Inverse von A.

Lösung:

a) Da die erste und die vierte Zeile der 4×4 Matrix A identisch sind, kann ihr Rang höchstens 3 sein. Also gilt $\det A = 0$.

b) Die 3×3 Untermatrix links unten hat eine von null verschiedene Determinante, also hat A einen Rang von mindestens 3. Zusammen mit a) folgt, dass der Rang von A genau 3 ist.

c) Es gilt $\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A) = 3$, also $\dim(\text{Kern}(A)) = 4 - \dim(\text{Bild}(A)) = 4 - 3 = 1$.
Alternativ zur Rangbestimmung mit Hilfe von Determinanten kann man auch das Gauß-Verfahren verwenden. Dieses liefert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - \frac{2}{3}I \\ \rightsquigarrow \\ III - \frac{2}{3}I \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} III - 2II \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für $x_4 = 1$ liefert Rückwärtseinsetzen $x_3 = 5$, $x_2 = -8$ und $x_1 = 1$, also

$$\text{Kern}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

d) Wegen a) ist A nicht invertierbar.

Aufgabe H2 (Matrizen)
(2+2 Punkte)
Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Berechne eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$ und $\operatorname{Kern}(f)$.

Lösung: Das Bild von f ist die lineare Hülle der Bilder einer Basis des $\mathbb{R}^4$. Verwendet man als Basis die Standardbasis sind deren Bilder gerade die Spalten von A. Daher erhält man eine Basis vom Bild, wenn man A^T in Zeilenstufenform bringt:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-2I,\\ IV-3I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \overset{\substack{III+4II,\\ IV+7II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$.
Der Kern von f ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Um dieses zu lösen, bringt man zunächst A in Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-4I,\\ III-2I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2a-3b \\ 4a+7b \\ a \\ b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis des Kerns von f.

Aufgabe H3 (Determinanten)
(**0.5+0.5+1.5+1.5+2 Punkte**) Es seien beliebige quadratische Matrizen A und B gegeben. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) $AA = I \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow$ AB ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

Lösung:

(a) *Richtig!*
<u>Beh.:</u> $A^2 = I \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
<u>Bew.:</u> Nach Satz 11.1 e) gilt $\det(A^2) = (\det(A))^2$ und nach a) gilt $\det(I) = 1$. Also ist $1 = \det(I) = \det(A^2) = (\det(A))^2$ und damit $\det(A) = \pm 1$.

(b) *Richtig!*
Beh.: A nicht invertierbar $\Rightarrow AB$ nicht invertierbar
Bew.: Da A nicht invertierbar ist, gilt $\det(A) = 0$. Also ist auch $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$ und damit AB nicht invertierbar.

(c) *Falsch!*
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $\det(A) + \det(B) = 0 + 1 = 1$, aber:

$$\det(A + B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

(d) *Falsch!*
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und damit auch $A^3 = 0$, aber $A \neq 0$.

(e) *Richtig!*
Beh.: $A^3 = 0 \Rightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2$.
Bew.: Wir müssen zeigen

$$(i)\ (I - A)(I + A + A^2) = I$$
$$(ii)\ (I + A + A^2)(I - A) = I$$

zu (i): $(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I - A^3 = I - 0 = I$.
zu (ii): $(I + A + A^2)(I - A) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I$.