Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
23. April 2010

1. Übungsblatt zur „Mathematik II für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gerade im $\mathbb{R}^2$)

Gegeben sind die Punkte $P_1(1,2)$, $P_2(4,1)$ und $P_3(1,1)$.

a) Bestimme die Gleichung für die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2 in Hessescher Normalform.

b) Berechne den Abstand des Punktes P_3 von dieser Geraden.

c) Gib die Gleichung für die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2 in Parameterform an.

d) Bestimme den Ortsvektor $\vec{r}_0$ des Lotes vom Ursprung auf die Gerade.

Lösung:

a) Die Koeffizienten A, B und C müssen folgende 2 Gleichungen erfüllen

$$A \cdot 1 + B \cdot 2 = C$$
$$A \cdot 4 + B \cdot 1 = C.$$

Daher gilt $B = 3A$. Durch einsetzen $A = 1$ erfolgt hieraus, dass die Geradengleichung der Geraden die Form

$$x + 3y = 7$$

hat. Es gilt

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

somit ergibt sich die Hessesche Normalform

$$\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y = \frac{7}{\sqrt{10}}.$$

b) Der Abstand des Punktes P_3 von der Geraden

$$k = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 1 + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 1 - \frac{7}{\sqrt{10}} \right| = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

c) Die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2 hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) Es gilt $\vec{r_0} = \vec{r_1} + \mu_0 \vec{t}$, wobei $\mu_0 = -\frac{\vec{r_1} \cdot \vec{t}}{|\vec{t}|^2}$. Also gilt mit $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, dass $\mu_0 = -\frac{1}{10}$ ist und daher gilt $\vec{r_0} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G2 (Ebene)

Durch die Punkte $P(1,1,1)$, $Q(0,1,2)$ und $R(1,0,2)$ wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ festgelegt. Gib für diese Ebene die folgenden Darstellungen an:

a) vektorielle Darstellung $\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda\vec{s} + \mu\vec{t}$,

b) lineare Gleichung $Ax + By + Cz = D$,

c) Hessesche Normalform $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$.

Lösung:

a) Sei $\vec{r_1} = (1,1,1)$ der Ortsvektor der Ebene H durch die Punkte P, Q und R. Die Richtungsvektoren von H sind die folgenden:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit hat die Parameterdarstellung von H die Form:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) Gesucht ist der Vektor $\vec{N}$, der zu $\vec{t}$ und $\vec{s}$ orthogonal ist. Mit Hilfe des Vektorproduktes lässt sich $\vec{N}$ wie folgt berechnen:

$$\vec{N} = \vec{t} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} s_y t_z - s_z t_y \\ s_z t_x - s_x t_z \\ s_x t_y - s_y t_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \cdot (-1) \\ 0 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ebene H erfüllt somit die Geradengleichung

$$x + y + z = 3.$$

c) Die Hessesche Normalform berechnet sich so:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = \sqrt{3}.$$

Aufgabe G3 (Vektoren im $\mathbb{R}^3$, Vektorprodukt)

Die Punkte $P_1(0,0,0)$, $P_2(1,0,0)$ und $P_3(1,1,\sqrt{2})$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks im $\mathbb{R}^3$. Berechne

a) den Flächeninhalt F des Dreiecks mit Hilfe des Vektorproduktes,

b) die Länge der Seiten P_1P_2, P_1P_3,

c) den Winkel α im Punkt P_1 und

d) den Flächeninhalt F des Dreiecks mit der Formel $F = 1/2 \cdot |\vec{P_1P_2}| \cdot |\vec{P_1P_3}| \cdot \sin\alpha$.

Lösung: Die Richtungsvektoren sind die folgenden:

$$\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Der Flächeninhalt mit Hilfe des Vektorproduktes ist

$$F = 1/2 \cdot |\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}| = 1/2 \cdot \sqrt{(0 \cdot \sqrt{2} - 0 \cdot 1)^2 + (0 \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt{2})^2 + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1)^2} = \sqrt{3}/2.$$

b) Zur Berechnung der Längen der Vektoren verwenden wir die Formel

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Wir erhalten also

$$\left|\vec{P_1P_2}\right| = \sqrt{1+0+0} = 1, \ \left|\vec{P_1P_3}\right| = \sqrt{1+1+2} = 2.$$

c) Es gilt die Formel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Somit erhalten wir den Winkel im Punkt P_1

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\alpha = \pi/3.$$

d) Der Flächeninhalt lässt sich jetzt auch mit der Formel $F = 1/2 \cdot |\vec{P_1P_2}| \cdot |\vec{P_1P_3}| \cdot \sin\alpha$ ausrechnen. Aus b) und c) erhält man $F = 1/2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}/2$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Vektoren im $\mathbb{R}^2$)
(3+2 Punkte)

Gegeben sei der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

a) Wieviele Vektoren mit Länge 1 gibt es, die mit v_1 einen Winkel von $\frac{\pi}{6}$ einschließen? Berechne diese Vektoren.

b) Gib alle Vektoren an, die auf v_1 senkrecht stehen.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} |v_1| &= \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \\ |u| &= \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1. \end{aligned}$$

Wir suchen also die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{6} &= \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}}{2\sqrt{3} \cdot 1} \\ \Leftrightarrow \qquad 3 = \cos\frac{\pi}{6} \cdot 2\sqrt{3} &= 3u_x + \sqrt{3}u_y. \end{aligned}$$

Daraus folgt $u_y = \sqrt{3} - \sqrt{3}u_x$. Nach dem Einsetzen u_y in $u_x^2 + u_y^2 = 1$ erhält man, dass u_x die Gleichung $4u_x^2 - 6u_x + 2 = 0$ erfüllen muss. Offensichtlich erhalten wir

$$u_x = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad u_y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$u_x = 1 \quad \text{und} \quad u_y = 0.$$

b) Gesucht sind alle Vektoren w, für die gilt $v_1 \perp w$, es muss also gelten

$$\begin{aligned} & v_1 \cdot w = 0 \\ \Rightarrow \quad & 3w_x + \sqrt{3}w_y = 0 \\ \Rightarrow \quad & w_x = -\frac{1}{\sqrt{3}}w_y \end{aligned}$$

Wählen wir $w_y = 1 \Rightarrow w_x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow w = \delta \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta \in \mathbb{R}$$

sind die zu v_1 orthogonalen Vektoren.

Aufgabe H2 (Vektor- und Skalarprodukt)
(2+2 Punkte)

Seien $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Zeige

a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + u_2v_3w_1 - u_2v_1w_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3 \\ &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_2v_3 + u_2w_3 - u_3v_2 - u_3w_2 \\ u_3v_1 + u_3w_1 - u_1v_3 - u_1w_3 \\ u_1v_2 + u_1w_2 - u_2v_1 - u_2w_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2w_3 - u_3w_2 \\ u_3w_1 - u_1w_3 \\ u_1w_2 - u_2w_1 \end{pmatrix} \\ &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.\end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Spatprodukt)
(3+3 Punkte)

a) Berechne das Volumen der von den 3 folgenden Vektoren erzeugten Pyramide

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \qquad \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Hinweis: Das Volumen einer Pyramide berechnet sich gemäß $V = \frac{1}{3}Gh$ (G ist die Grundfläche, h ist die Höhe).

b) Wie hängt das von den folgenden 3 Vektoren aufgespannte Spatvolumen von $x \in \mathbb{R}$ ab? Warum? Begründe deine Antwort.

$$\vec{a} = \frac{\vec{e}_1 - \vec{e}_2}{2}, \qquad \vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \qquad \vec{c} = 2\vec{e}_2 - x\vec{e}_3.$$

Hinweis: Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$.

Lösung:

a) Das Volumen W des von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bestimmten Parallelotops ist $W = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = h \cdot 2G$. Somit gilt für das Volumen V der Pyramide

$$\begin{aligned}V &= \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{3}W/2 = \tfrac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \\ &= \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1.\end{aligned}$$

b)

$$V = \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = 1.$$

Das Volumen hängt demnach nicht von x ab. $\vec{a} \times \vec{b}$ liegt orthogonal zu $x\vec{e}_3$, d.h. $x\vec{e}_3$ befindet sich in der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.