Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova, N. Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS2010
16.07.2010

Mathematik II für ETiT etc.

Test

A1 Bei dieser Aufgabe ist jeweils genau eine Antwort richtig. Trage ein Kreuz an der entsprechenden Stelle in die Lösungstabelle (letzte Seite) ein. Rechenwege sind nicht verlangt und werden auch nicht bewertet. Lies den Aufgabentext sorgfältig; insbesondere wird gelegentlich danach gefragt, welche Aussage **nicht** zutrifft. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen, eine fehlende Antwort ergibt weder Punkt noch Abzug. Wenn das Gesamtergebnis negativ ist, dann geht Aufgabe 1 mit Null Punkten in die Klausurwertung ein.

1. Für beliebige Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $c \in \mathbb{R}$ gilt folgende Regel **nicht**:

   a) $||c\vec{x}|| = c \cdot ||\vec{x}||$ b) $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$
   c) $||\vec{x}|| + ||\vec{y}|| \geq ||\vec{x}|| - ||\vec{y}||$ d) $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$

2. Sei A eine (3×2)-Matrix und B eine (4×2)-Matrix. Die Matrix $(A \cdot B^T)^T$ ist eine

   a) (3×4)-Matrix b) (4×3)-Matrix c) (2×4)-Matrix d) (3×2)-Matrix.

3. Die lineare Abbildung $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

   a) ist injektiv; b) ist surjektiv; c) hat Rang 3; d) hat Rang 2.

4. Seien A eine $(n \times n)$-Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt folgende Regel immer

   a) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ b) $\det(A^k) = k \det(A)$
   c) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ d) $\det(A + A) = 2 \det(A)$.

5. Gegeben sei die lineare Abbildung $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$. Dann gilt

   a) $\ker L = \{ 0 \}$;
   b) $\ker L = \left\{ \lambda_1 (0,0,1)^T + \lambda_2 (1,-1,0)^T \colon \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$;
   c) $\ker L = \left\{ \lambda_1 (1,1)^T + \lambda_2 (-1,-1)^T \colon \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$;
   d) $\ker L = \emptyset$.

6. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

   a) $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$ sind die Eigenwerte von A.
   b) $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ sind die Eigenwerte von A.
   c) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 0$ sind die Eigenwerte von A.
   d) A besitzt keine Eigenwerte.

7. Gegeben sei die Ebene $E \colon x - y - z = 1$ und die Gerade $g \colon (x,y,z)^T = \lambda(2,1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Dann

   a) liegt die Gerade g in der Ebene E;
   b) schneidet die Gerade g die Ebene E in einem Punkt;
   c) schneidet die Gerade g die Ebene E nicht;
   d) liegt die Gerade g senkrecht zur Ebene E.

8. Die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = 1$ beschreibt

   a) eine Kreislinie in $\mathbb{R}^2$ mit Radius $r = 1$;
   b) eine Ebene in $\mathbb{R}^2$ mit Abstand $d = 1$ zum Ursprung;
   c) eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch den Ursprung mit Richtungsvektor $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)^T$;
   d) eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Abstand $d = 1$ zum Ursprung.

9. Gegeben sei die Familie von Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren

a) v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear unabhängig;
b) v_1, v_2, v_4 sind linear unabhängig;
c) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig;
d) v_2, v_3, v_5 sind linear unabhängig.

10. Eine symmetrische (2×2)- Matrix ist positiv definit, wenn

a) alle Einträge positiv sind;
b) die Summe der Eigenwerte positiv ist;
c) das Produkt der Eigenwerte positiv ist;
d) beide Eigenwerte positiv sind.

11. Welche der folgenden Abbildungen ist linear?

a) $f_1 \colon R \to R,\ x \mapsto 2x + 3$;
b) $f_2 \colon R^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (xy, 2x)$;
c) $f_3 \colon R^2 \to R^2,\ (x, y) \mapsto (2x + 5y, -x - 3y)$;
a) $f_4 \colon R \to R,\ x \mapsto (2x + 3)^{-1}$.

12. Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

a) orthogonal, b) symmetrisch, c) hermitesch, d) unitär.

A2 1. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

a) Skizziere die Funktion auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.
b) Bestimme die Fourierreihe FR der Funktion f.
c) Gib ein maximales Intervall an, auf dem gilt: $FR(x) = f(x)$. Begründe deine Wahl.
d) Bestimme den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ durch Auswerten der Fourierreihe an einer geeigneten Stelle x_0.

2. Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}^n (ax - b)^{2n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimme a und b so, daß $P(x)$ genau auf $(\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$ definiert ist bzw. konvergiert.

A3 Gegeben sei die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2 - xy^2, \quad D(f) = \mathbb{R}^2$$

1. Bestimme den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.
2. Bestimme alle kritischen Punkte von f und deren Charakter.
3. Skizziere die Menge $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimme den minimalen und den maximalen Funktionswert von f auf dieser Menge. *Hinweis:* Verwende die Darstellung $y^2 = 1 - x^2$ für die Untersuchung der Funktionswerte auf dem Rand.
4. Bestimme die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Lösungstabelle für Aufgabe 1:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)
a)												
b)												
c)												
d)												