Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2010
09.07.2010

Mathematik II für ETiT etc.

Musterlösung 12. Übung

Präsenzaufgaben

G1 (Steilster Anstieg)

G2 (Satz von Taylor)

1.

$$\begin{aligned}
f(1,\pi) &= 1\ , & & \\
f_x(x,y) &= 2x\sin(\tfrac{xy}{2}) + \tfrac{1}{2}x^2 y\cos(\tfrac{xy}{2})\ , & f_x(1,\pi) &= 2\ , \\
f_y(x,y) &= \tfrac{x^3}{2}\cos(\tfrac{xy}{2})\ , & f_y(x,y) &= 0\ , \\
f_{xx}(x,y) &= 2\sin(\tfrac{xy}{2}) + 2xy\cos(\tfrac{xy}{2}) - \tfrac{1}{4}x^2y^2\sin(\tfrac{xy}{2})\ , & f_{xx}(1,\pi) &= 2-\tfrac{1}{4}\pi^2\ , \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = \tfrac{3}{2}x^2\cos(\tfrac{xy}{2}) - \tfrac{1}{4}x^3y\sin(\tfrac{xy}{2})\ , & f_{xy}(1,\pi) &= f_{yx}(1,\pi) = -\tfrac{1}{4}\pi\ , \\
f_{yy}(x,y) &= -\tfrac{1}{4}x^4\sin(\tfrac{xy}{2})\ , & f_{yy}(1,\pi) &= -\tfrac{1}{4}\ .
\end{aligned}$$

Als Taylorpolynom ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
T_3 f(x,y) &= 1 + 2(x-1) + \frac{2-\frac{1}{4}\pi}{2}(x-1)^2 + 2\cdot\frac{-\frac{1}{4}\pi}{2}(x-1)(y-\pi) + \frac{-\frac{1}{4}}{2}(y-\pi)^2 \\
&= 1 + 2(x-1) + (1-\tfrac{1}{8}\pi^2)(x-1)^2 - \tfrac{1}{4}\pi(x-1)(y-\pi) - \tfrac{1}{8}(y-\pi)^2\ .
\end{aligned}$$

2. Wegen $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gilt mit $q = -(x+y)$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+y)^n$$

Wegen $x+y \in O(\|X\|)$ gilt auch $(x+y)^n \in O(\|X\|^n)$. Für die Funktion f ergibt sich somit $f(x,y) = 1-(x+y)+(x+y)^2+O(\|X\|^3)$, also

$$T_3 f(x,y) = 1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2\ .$$

3. Es gilt

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\ , \qquad \sin y = y - O(y^3)\ , \qquad e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^3)\ .$$

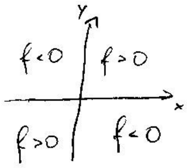
Jede Funktion in $O(x)$ liegt auch in $O(\|X\|)$ für $(x,y)\to 0$. Analoges gilt für $O(y)$ und $O(\|X\|)$. Für die Funktion f ergibt sich dann durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(\|X\|^4)\big)\big(y + O(\|X\|^3)\big)\big(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + O(\|X\|^3)\big) \\
&= \big(yO(\|X\|^3)\big)\big(1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + O(\|X\|^3)\big) \\
&= y + yz + O(\|X\|^3)\ .
\end{aligned}$$

Das Taylorpolyon ist somit $T_3 f(x,y) = y + yz$.

G3 ((Extrema)

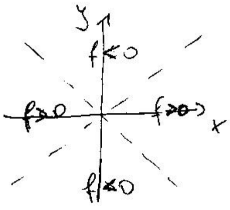
(i) $f = xy$



Sattelpunkt

$f(0,0) = 0$

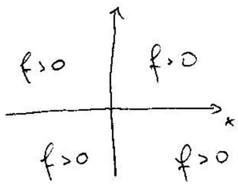
(ii) $f = x^2 - y^2$



Sattelpunkt

$f(0,0) = 0$

(iii) $f = x^2 + y^2$

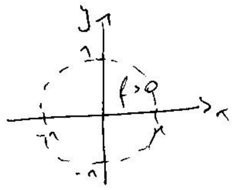


Minimum

$f(x,y) = 0$

(iv) $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

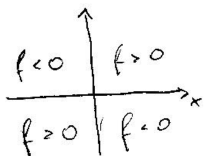
mit $x^2 + y^2 \leq 1$



Maximum

$f(0,0) = 1$

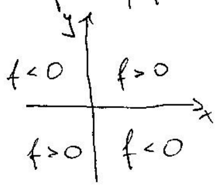
(v) $f = \sin(xy)\cos(xy)$



Sattelpunkt

$f(0,0) = 0$

(vi) $f = x^2 \sin(xy)$



Sattelpunkt

$f(0,0) = 0$

H1 (Maxima)

$x + y + z = 12$, $x, y, z > 0$

$x \cdot y \cdot z \to \max!$

$\Rightarrow z = 12 - x - y$

setze $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$

Einsetzen von $z = 12 - x - y$

$\Rightarrow f(x,y) = (12 - x - y)xy = 12xy - x^2y - xy^2$

$f(x,y)$ ist zu maximieren

$f_x = 12y - 2xy - y^2 \overset{!}{=} 0$ (Beachte die Nebenbedingung $x,y,z > 0$!!!)

$f_y = 12x - x^2 - 2xy \overset{!}{=} 0$

f_x geht aus f_y hervor nach Vertauschen von x und y!

$\rightsquigarrow$ es muß gelten: $x = y$

Einsetzen in f_x: $12x - 2x^2 - x^2 = 0$

(i) $x = 0$

$\rightsquigarrow x, y = 0$, $z = 12$

$x \cdot y \cdot z = 0$

(ii) $x \neq 0$

$\Rightarrow 12 - 3x = 0$, $x = 4$

$x, y = 4$, $z = 4$

$x \cdot y \cdot z = 64$

Lösung ist: $\underline{\underline{(x,y,z) = (4,4,4)}}$

H2 (Methode von Langrange)

Auf der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ gilt $xy^2 = x(1 - x^2) = x - x^3 = F(x)$. Extrema von f unter g sind genau die Extrema von F. Nach Rechnung ergibt sich: F hat Extremalstellen in $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Dabei ist $x_1 = \frac{1}{3}$ ein Maximum und $x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ein Minimum von F. Also ist der Maximalwert von f unter g gegeben durch $F(x_1) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ und der Minimalwert $F(x_2) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$. Alternativ: Lagrange. $\nabla_{x,y,\lambda}(f - \lambda g) = (y^2 - 2\lambda x, 2xy - 2\lambda y, g) = (0,0,0)$. Da unter der Nebenbedingung $g = 0$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte von f vorkommen, gilt für Extremalstellen $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Also folgt aus der Lagrange-Bedingung: $y^2 = 2\lambda x$ und $x = \lambda$, also $y^2 = 2x^2$. Ausserdem muss gelten $x^2 + y^2 = 1$. Daraus folgt: $x^2 = \frac{1}{3}$ und $y^2 = \frac{2}{3}$. Daher $f(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ und $f(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$. Weil f auf der kompakten Menge $x^2 + y^2 = 1$ stetig ist, nimmt es dort sein Maximum und Minimum an, also müssen dies die Extremwerte von f unter g sein.

H3 (Extremwertbestimmung)

Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$:

$$|xy\ln(x^2+y^2)| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|.$$

Da $\lim_{r\to 0}\frac{1}{2}r^2|\ln r^2| = 0$ (de l'Hospital) ist, ist auch

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy\ln(x^2+y^2)| = 0.$$

Außerdem erhalten wir $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Sei also $(x,y)\neq(0,0)$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}+\ln(x^2+y^2)) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(y\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+\ln(x^2+y^2)) = 0.$$

Wenn $x=0$, dann ist $y\ln y^2=0$, also $y=0$, weil der Punkt $(0,\pm 1)$ nicht im Inneren von A liegt. Sei also $x\neq 0$ und $y\neq 0$. Dann ist

$$\frac{2x^2}{x^2+y^2} = \frac{2y^2}{x^2+y^2}, \quad \text{also} \quad x^2=y^2.$$

Es folgt

$$\frac{2x^2}{2x^2}+\ln(2x^2)=0, \quad \text{also} \quad x^2=\frac{1}{2e}.$$

Also bekommen wir 4 Lösungen

$$(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}), \quad (\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}),$$

wobei

$$f(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}) = -\frac{1}{2e} \quad \text{und} \quad f(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}) = \frac{1}{2e}.$$

Erstere sind lokale Minima und letztere lokale Maxima.
Ausserdem ist $f(0,0)=0$ und $f(x,y(x)))=4x\sqrt{e^4-x^2}$ für $x^2+y^2=e^4$. Hier suchen wir jetzt die Extrema durch Differenzieren: $\frac{d\,f(x,y(x)))}{dx} = 4\sqrt{e^4-x^2}-4x^2(e^4-x^2)^{\frac{3}{2}}$. Durch Nullsetzen erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$4\sqrt{e^4-x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{e^4-x^2}} = 4(e^4-x^2)-4x^2=0$$

$x=\pm\frac{e^2}{\sqrt{2}}$. Das ergibt 4 (!!!) Extremstellen $(\frac{e^2}{\sqrt{2}},\frac{e^2}{\sqrt{2}})$,$(\frac{e^2}{\sqrt{2}},-\frac{e^2}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{e^2}{\sqrt{2}},\frac{e^2}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{e^2}{\sqrt{2}},-\frac{e^2}{\sqrt{2}})$. Die entsprechenden Funktionswerte lauten $f(\frac{e^2}{\sqrt{2}},\frac{e^2}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{e^2}{\sqrt{2}},-\frac{e^2}{\sqrt{2}}) = 2e^4$ und $f(\frac{e^2}{\sqrt{2}},-\frac{e^2}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{e^2}{\sqrt{2}},\frac{e^2}{\sqrt{2}}) = -2e^4$. Das bedeutet wir haben **auf dem Rand zwei globale Maxima** $(\pm\frac{e^2}{\sqrt{2}},\pm\frac{e^2}{\sqrt{2}},2e^4)$ und **zwei Minima** $(\mp\frac{e^2}{\sqrt{2}},\pm\frac{e^2}{\sqrt{2}},-2e^4)$ gefunden.

G4 (Extremwertbestimmung)

$$\nabla f = -2(\cos x \sin x \cos^2 y, \cos y \sin y \cos^2 x)$$

Nullstellen aus 1. Komponente $(x,y) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u = \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z},\}$ und $(x,y) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon v = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z},\}$
Nullstellen aus 2. Komponente $(x,y) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z},\}$ und $(x,y) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon v = \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\}$
Daher sind alle Punkte in $N_k := N_1 \cup N_2 \cup N_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = n\pi,\ y = m\pi,\ n,m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\}$ kritische Stellen.
Die Hessematrix lautet:

$$\nabla^2 f = 2 \begin{pmatrix} \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y & 2\cos x \cos y \sin x \sin y \\ 2\cos x \cos y \sin x \sin y & \cos^2 x \sin^y - \cos^2 x \cos^2 y \end{pmatrix}$$

Für die kritischen Stellen N_1 erhalten wir

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir haben es daher mit Maxima zu tun: $((\frac{(2n+1)\pi}{2}, \frac{(2m+1)\pi}{2}), 1),\ n,m \in \mathbb{Z}$.
Für die kritischen Stellen $N_2 \cup N_3$ erhalten wir

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uns hilft die Hessematrix also nicht. Wir wissen aber, daß $f \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. An den Stellen $(x,y) \in N_2 \cup N_3$ ist die Funktion stets $f(x,y) = 0$. Daher haben wir hier Minima.

H4 (Implizite Funktionen)

i) Es gilt :

$$J_\Phi(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\phi \sin\theta & r\cos\phi \sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Also $J_\Phi(1,0,\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\det(J_\Phi(1,0,\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$. Daher ist $J_\Phi(1,0,\frac{\pi}{2})$ invertierbar. Es gibt also eine offene Umgebung U von $(1,0,\frac{\pi}{2})$, sodaß Φ auf U injektiv also invertierbar ist. $V := \Phi(U)$ ist eine offene Umgebung von $\Phi(1,0,\frac{\pi}{2})$ und $\Phi^{-1} \colon V \to U$ ist stetig differenzierbar.

ii) Sei $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ genauer $(x,y,z)^T \in V$. Es gilt $(r,\phi,\theta)^T = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan\frac{x}{y} \\ \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}$.

iii) In $\Phi(1,0,\frac{\pi}{2}) = (0,1,0)^T$ existieren die partiellen Ableitungen von Φ^{-1} aus ii). Ansonsten sind sie in einer Umgebung von $(0,1,0)^T$ stetig. $\Rightarrow \Phi^{-1}$ ist in einer Umgebung von $\Phi(1,0,\frac{\pi}{2}) = (0,1,0)^T$ stetig differenzierbar.