G1 Eine Teilmenge M heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

G2

1. Skizze siehe Abbildung 1. Der einzige Häufungspunkte von M ist $(0, 0)$. Die Menge ist nicht offen und nicht abgesschlossen, also auch nicht kompakt. Sie ist allerdings beschränkt.

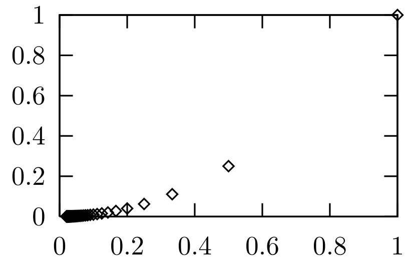

Abbildung 1:

2. Die Menge ist das offene Quadrat mit gegenüber liegenden Eckpunkten $(-1, -1)$ und $(1, 1)$. Die Menge ist offen, und beschränkt. Sie ist nicht abgeschlossen und somit auch nicht kompakt.

G4

1. Skizze siehe Abbildung 2.
2. Die Höhenlinie H_c mit $0 < c \leq 1$ ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius $r = \sqrt{-\ln c}$.
3. Die Schnitte von f sind in beiden Fällen Gauß-Verteilungen, siehe Abbildung 3.

G5 Die Aufzählung der Visualisierungsmöglichkeiten hier ist nicht vollständig:

1. a) f_1 lässt sich z.B. als Weg in $\mathbb{R}^2$ darstellen, siehe Abbildung 4.

   b) Der Graph von f_1 lässt sich als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auffassen, siehe Abbildung 5
2. f_2 lästs sich als Weg im $\mathbb{R}^3$ darstellen, siehe Abbildung 6
3. a) f_3 lässt sich als Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$ auffassen, siehe Abbildung 7.

   b) Wählt man ein festes Gitter im $\mathbb{R}^2$ z.B. $G_1 = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ oder $G_2 = \{\, (n \sin t, n \cos t) : n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R} \,\}$, so lässt sich f_3 visualisieren, im dem man das Bildgitter $f_3(G)$ darstellt. Für die Funktion f_3 werden diese beiden Gitter z.B. jeweils auf sich selbst abgebildet.

   c) Für festes $x \in \mathbb{R}$ lässt sich der Schnitt $y \mapsto f_3(x, y)$ als Weg im $\mathbb{R}^2$ auffassen. Die gesamte Funktion f_3 lässt sich so als Scharr von Wegen im $\mathbb{R}^2$ auffassen. (Analog für vertauschte Rollen von x und y.)
4. a) f_4 lässt sich durch seine Höhenlinien visualisieren. Die Höhenlinie $H_c = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_4(x, y$ für $c > 0$ ist in diesem Fall ein Kreis um den Ursprung mit Radius $r = 1/\sqrt{c}$.

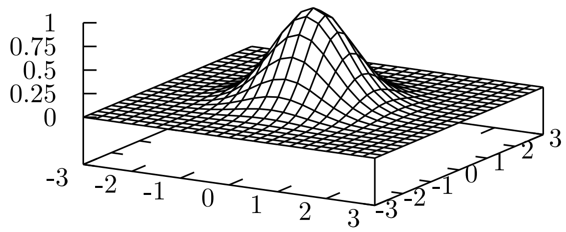

Abbildung 2:

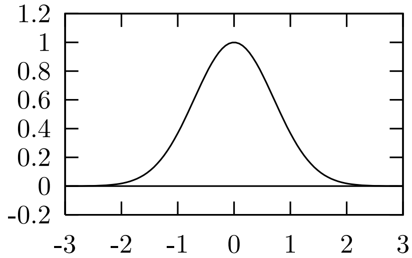

Abbildung 3:

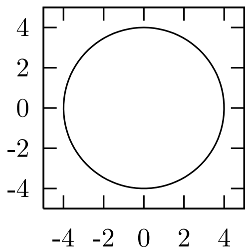

Abbildung 4:

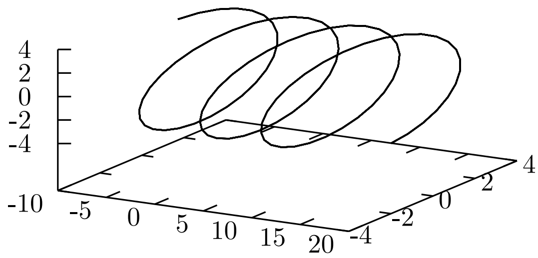

Abbildung 5:

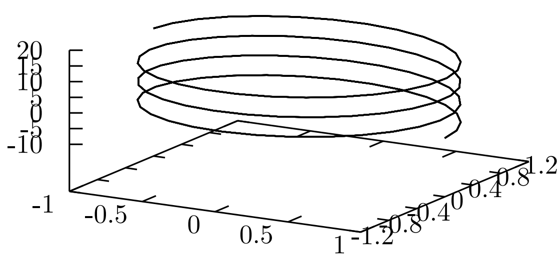

Abbildung 6:

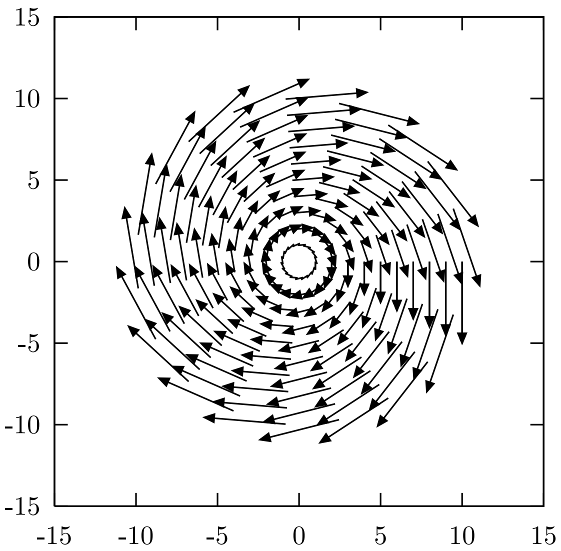

Abbildung 7:

b) Wählt man eine Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$, so lässt sich f_4 mit Hilfe von Farben als „Temperaturverlauf“ auf diese Fläche visualisieren.

Es lassen sich die Verkettungen $f_1 \circ f_4,\ f_2 \circ f_4,\ f_3 \circ f_1,\ f_3 \circ f_3$ und $f_4 \circ f_2$ bilden.

H1 ii) Funktion f ist stetig - damit auch punktweise stetig - und stückweise glatt. Funktion g ist nur stückweise stetig und stückweise glatt.

iii) Die Fourierreihe von f und g ist einfach $FR(x) = 1$.

iv) Beide Funktionen haben die selbe FR, obwohl sie sich unterscheiden. $f(x) = FR(x)$ fr alle $x \in \mathbb{R}$. $g(x)$ stimmt mit $FR(x)$ an den Sprungstellen nicht überein, also für alle $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Das kommt daher, daß eine Funktion mit ihrer FR nur dann in einem Punkt $x$übereinstimmt, falls die Funktion in diesem Punkt stetig ist. An Unstetigkeitsstellen ist gilt

$$FR(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \ .$$

In unserem Fall ist $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \frac{1+1}{2} = 1$.

v) Jedes abgeschlossene Intervall auf dem g stetig ist.

H2 1. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\ (0,0)\ \}$ gilt

$$0 \leq f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = |x| \ .$$

Für eine Folge (x_n, y_n) mit $(x_n, y_n) \to 0$ folgt damit wegen $|x_n| \to 0$ auch $f(x_n, y_n) \to 0$. Das heißt es gilt

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0 \ .$$

Setzen wir nun $f(0,0) := 0$, so wird dadurch die Funktion f and der Stelle $(0,0)$ stetig fortgesetzt.

2. Einerseits gilt für die Folge $(0, \frac{1}{n}) \to (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f(0, \tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \sin(0) n^2 = 0 \ .$$

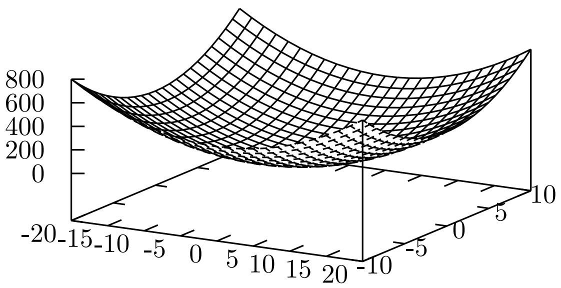

Abbildung 8:

Andererseits gilt für die Folge $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{n^2}, \tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \tfrac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \tfrac{1}{2}\ .$$

Der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert also nicht.

H3 Die Funktion F ist von der Form $F(x,y) = A\cdot\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ mit der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Die Umkehrfunktion ist deshalb durch $F^{-1}(x',y') = A^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Die Inverse von A ist $A^{-1} = \frac{1}{17}\left(\begin{smallmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, also

$$F^{-1}(x',y') = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5x' - y' \\ 2x' + 3y' \end{pmatrix}\ .$$

H4

1. Die Höhenlinien $H_c = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = c \,\}$ für $c \geq 0$ sind Elipsen um den Ursprung mit Hauptachsen auf der x- und y-Achse mit Radius $\sqrt{c}$ und $\frac{1}{4}\sqrt{c}$.
2. Skizze siehe Abbildung 8.
3. Der Temperaturverlauf ist durch die Verkettung $T \circ X$ gegeben

$$T\big(X(t)\big) = t^2(\cos^2 t + 4\sin^2 t) = t^2(1 + 3\sin^2 t)$$