G1 (Periodische Funktionen)

i) Die Funktion $f(x) = \cos(4\pi x + 2)$ hat die Periodenlänge

$\square$ 4π $\square$ 4 $\square$ 2 $\square$ $\frac{1}{4\pi}$ $\heartsuit$ $\frac{1}{2}$.

ii) Die Fourier-Reihe einer geraden Funktionen ist eine

$\square$ reine Sinusreihe $\heartsuit$ reine Kosinusreihe $\square$ Reihe mit Sinus- und Kosinustermen

iii) Ist f periodisch mit der Periode 2π und auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetig bis auf eine Unstetigkeitsstelle $x_0 \in (0, 2\pi)$, so konvergiert ihre Fourier-Reihe in x_0 gegen

$\square$ $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)$ $\square$ $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)$ $\heartsuit$ $\frac{1}{2}\left\{\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) + \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)\right\}$ $\square$ $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$

G2 (Fourier-Entwicklung)

iii) Die Funktion f ist auf $(-\pi, \pi)$ gerade,$f(x) = f(-x)$, also gilt $b_j = 0$ für $j \in N$.
$a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,dx = (2/\pi)\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = 4/\pi.$
Für $j > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
a_j &= (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(jx)\,dx \\
&= (2/\pi)\int_0^{\pi} sin(x)\cos(jx)\,dx \\
&= 2/(\pi)\int_0^{\pi} [\sin((j+1)x) - \sin((j-1)x)]/2\,dx \\
&= 1/\pi\,[-1/(j+1)\cos((j+1)x) + 1/(j-1)\cos((j-1)x)|_0^{\pi}] \\
&= 1/\pi\left[-1/(j+1)(-1)^{(j+1)} + 1/(j-1)(-1)^{(j-1)} + 1/(j+1) - 1/(j-1)\right] \\
&= 1/\pi\left[-2/((j-1)(j+1))(1+(-1)^j)\right]
\end{aligned}$$

$$a_1 = (2/\pi)\int_0^{\pi}\sin(2x)/2\,dx = (1/\pi)(-\cos(2x)/2)|_0^{\pi} = 0$$

$$FR(x) = 2/\pi - 4\sum_{j=1}^{\infty} 1/(\pi(2j-1)(2j+1))\ \cos(2jx)$$

H1 (Schaltkreis zum analogen Integrieren)

i) $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{960}{\pi}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)\frac{2\pi}{L}t)$ und
$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{48}{\pi^2}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\sin((2n+1)\frac{2\pi}{L}t)$

ii) siehe Abb.1

H2 (Differenziation & Integration)

i) Sei $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$. Die Fourier-Reihe von f' lautet

$$f'(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)n\sin nx\ .$$

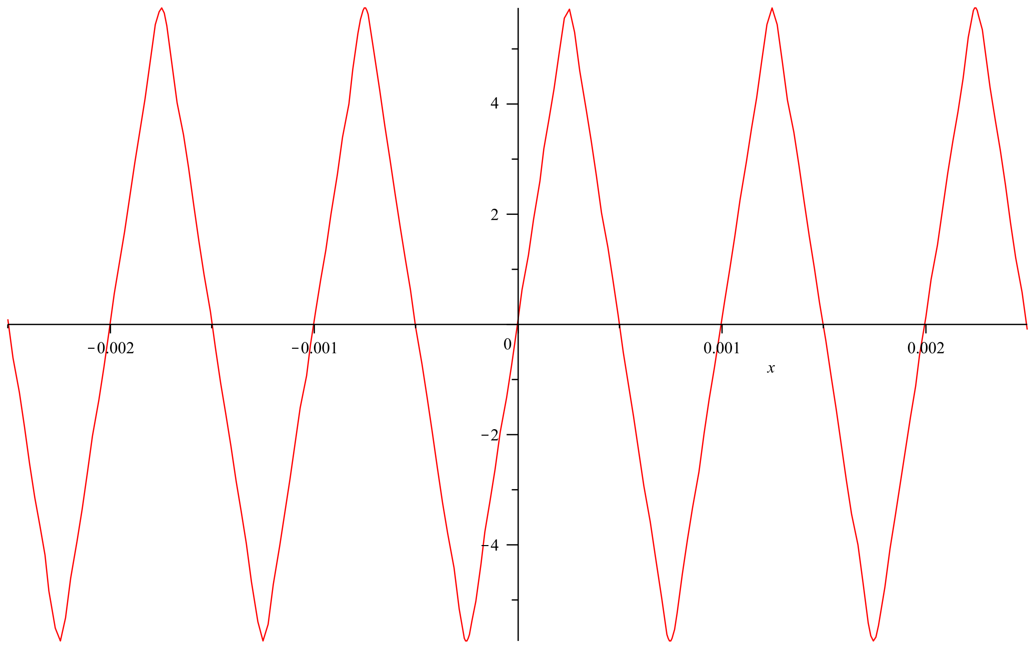


Abbildung 1: H24 Stromstärke

ii) $F(x) = \frac{a_0}{2}x + \int\limits_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt)\, dt$.
$F(x)$ ist also nur dann wieder periodisch, wenn der lineare Anteil verschwindet. D.h., $a_0 = 0$.

H3 (Fourierentwicklung)

i)

ii) $\tilde{f}$ ist ungerade.

iii) Wir berechnen die Koeffizienten b_n.

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}\sin nx\, dx \\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot\sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\cdot\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}([-x\frac{\cos nx}{n}]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\, dx \\
=& \frac{2}{n\pi}(-\frac{\pi}{\cos}n\pi + \frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}(\sin n\pi - \sin n\frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Wir müssen jetzt beachten, da

1. für $n = 1, 5, 9, \ldots = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}_0$ gilt $= \cos n\frac{\pi}{2} = \sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = -1$ und $\sin n\frac{\pi}{2} = 1$
2. für $n = 3, 7, 11, \ldots = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\cos n\frac{\pi}{2} = \sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = -1$ und $\sin n\frac{\pi}{2} = -1$
3. für $n = 2, 6, 10, \ldots = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\cos n\pi = 1$, $\cos n\frac{\pi}{2} = -1$ und $\sin n\pi = \sin n\frac{\pi}{2} = 0$
4. für $n = 4, 8, \ldots = 4k,\ k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\cos n\pi = \cos n\frac{\pi}{2} = 1$, und $\sin n\pi = \sin n\frac{\pi}{2} = 0$

Das ergibt für die Fourierreihe $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ mit

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2}, & \text{für } n = 4k+1 \\ -\frac{1}{n}, & \text{für } n = 4k+2 \\ \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi n^2}, & \text{für } n = 4k+3 \\ -\frac{1}{n}, & \text{für } n = 4k+4 \end{cases} \quad , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

iv) $f = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ mit b_n wie oben

H27 (Fourierentwicklung)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

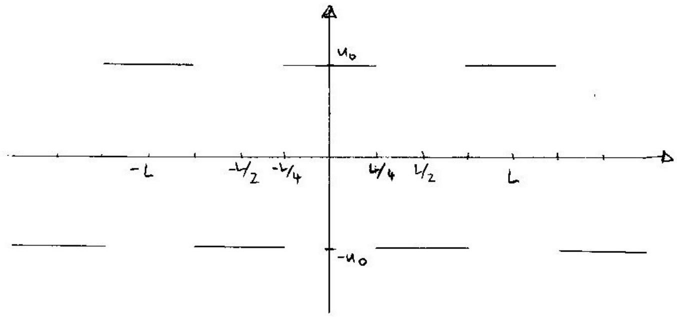
$\cos^2 x$ ist 2π-periodisch, $a_0 = 1,\ b_n = 0\ \forall n,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ \ldots$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$\sin^2 x$ ist 2π-periodisch, $a_0 = 1,\ b_n = 0\ \forall n,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ \ldots$

G3) (Schaltkreis zum analogen Integrieren)

i)



ii)

$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nt$

- $u(t)$ ist eine gerade Funktion!
  $\Rightarrow b_n = 0$ für alle n.
- $u(t)$ besitzt Periode L. $u(t) = u(t+L)$,
  deshalb betrachten wir $\tilde{u}(t) = u(\frac{L}{2\pi} t)$.
  $\tilde{u}(t)$ ist 2π-periodisch.
  Wir berechnen nun die Fourierreihe von $\tilde{u}(t)$.
  $\tilde{u}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nt$. (Die $\tilde{b}_n$ sind natürlich ebenfalls $\tilde{b}_n = 0$).

$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{u}(t)\, dt$.

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\frac{L}{2\pi} t)\, dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} u_0\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} -u_0\, dt \right)$

$= \frac{2}{\pi} u_0 \left(t \Big|_0^{\pi/2} - t \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} u_0 (\pi/2 - 0 - \pi + \pi/2) = 0$

$$\check{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \check{u}(t)\cdot\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\check{u}(t)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \check{u}(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\left(\frac{L}{2\pi}\cdot t\right)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} u_0\cdot\cos nt\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} u_0\cdot\cos nt\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}u_0\left(\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin nt}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2u_0}{\pi\cdot n}(1-0-(0-1)) = \frac{4\cdot u_0}{\pi}\cdot\frac{1}{n} & \text{falls } n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{2u_0}{\pi\cdot n}(-1-0-(0+1)) = -\frac{4\cdot u_0}{\pi}\cdot\frac{1}{n} & \text{falls } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \check{u}(t) = 4\cdot\frac{u_0}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1} - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} - \frac{\cos 7t}{7} + \dots\right)$$

verwende nun, daß gilt: $u(t) = \check{u}\left(\frac{2\pi}{L}\cdot t\right)$

$$\Rightarrow u(t) = \check{u}\left(\frac{2\pi}{L}\cdot t\right) = 4\cdot\frac{u_0}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{L}t}{1} - \frac{\cos 3\frac{2\pi}{L}t}{3} + \frac{\cos 5\frac{2\pi}{L}\cdot t}{5} - \frac{\cos 7\frac{2\pi}{L}t}{7} + \dots\right)$$

oder $$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot u_0}{\pi}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cos\left((2n+1)\cdot\frac{2\pi}{L}\cdot t\right)$$

iii) Aus der Gesetzmäßigkeit folgt:

aus Spannungsanteil $\frac{4\cdot u_0}{\pi}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{2\pi}{L}\cdot t\right)$

wird Stromanteil $\frac{L\cdot 4\cdot u_0}{2\pi^2}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+1\cdot\ell}\sin\left((2n+1)\frac{2\pi}{L}\cdot t\right)$

$$\Rightarrow i(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L\cdot 4\cdot u_0}{2\cdot\pi^2\ell}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{2\pi}{L}\cdot t\right) \quad \text{oder}$$

$$i(t) = 2L\cdot\frac{u_0}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\ell}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{L}\cdot t}{1} - \frac{\cos 3\frac{2\pi}{L}t}{9} + \frac{\cos 5\frac{2\pi}{L}t}{25} - \frac{\cos 7\frac{2\pi}{L}t}{49} + \dots\right)$$