Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 24./25. Juni 2010

Diskrete Optimierung

9. Übungsblatt

Gruppenübungen

Aufgabe G9.1 Benutze deinen Übungsleiter als LP-Orakel, um das folgende Problem mit dem Branch & Bound-Algorithmus zu lösen:

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^3\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & 5 \\ -3 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & -7 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad c = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Branche dabei immer auf der ersten nichtganzzahligen Variable.

Aufgabe G9.2 Betrachte für $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n > 0$ das 0/1-Knapsackproblem

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b, x_i \in \{0,1\}\right\}.$$

(a) Seien $\frac{w_1}{a_1} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{a_n}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_1 + \ldots + a_k \leq b$ und $a_1 + \ldots + a_{k+1} > b$. Zeige, dass $x \in [0,1]^n$ mit

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ (b - a_1 - \ldots - a_k)/a_{k+1}, & \text{falls } i = k+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Optimallösung für das relaxierte 0/1-Knapsackproblem darstellt.

(b) Gib mithilfe von (a) ein Branch & Bound-Verfahren für das 0/1-Knapsackproblem an.

(c) Berechne per Branch & Bound für $n = 7$, $b = 35$ und die in Tabelle 1 angegeben Werte für a_i und w_i eine Optimallösung für das 0/1-Knapsackproblem.

Aufgabe G9.3 Ein Mobilfunkanbieter betreibt deutschlandweit ein Netz von n Antennen. Jede Antenne empfängt Signale einer bestimmten Frequenz. Dem Mobilfunkanbieter stehen m verschiedene Frequenzen zur Verfügung, die den Antennen zugewiesen werden müssen.

Bei der Frequenzzuweisung müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

(1) Beträgt die (euklidische) Distanz zwischen zwei Antennen weniger als D_0 km, darf diesen beiden Antennen nicht dieselbe Frequenz zugewiesen werden.

(2) Bei einer Distanz zwischen D_0 und $D_1 > D_0$ km darf zwar dieselbe Frequenz zugewiesen werden, die dabei auftretenden Interferenzen verursachen jedoch Kosten von c Geldeinheiten pro Paar von interferierenden Antennen.

(3) Bei einer Distanz von mehr als D_1 km dürfen beide Antennen mit der selben Frequenz betrieben werden, ohne dass zusätzliche Kosten entstehen.

(a) Formulieren Sie das Problem, eine kostenminimale Frequenzzuweisung zu finden, als ganzzahliges Programm.

(b) Für Antennen, welche in Grenznähe stehen, kann es Einschränkungen hinsichtlich der zuweisbaren Frequenzen geben. D. h. für jede Antenne in einem Grenzgebiet gibt es eine Teilmenge von $\{1, ..., m\}$ der für diese Antenne zulässigen Frequenzen.

Erweitern Sie Ihr Modell aus (a) derart, dass dieser Sachverhalt mit berücksichtigt wird.

Hausübungen

Aufgabe H9.1 (6 Punkte) Löse folgendes Optimierungsproblem mittels Branch & Bound und skizziere den Branch & Bound-Baum. Zur Lösung der jeweils auftretenden LP-Relaxierungen darf ein LP-Solver benutzt werden.

$$\begin{array}{rrcl}
\max & 4x_1 - x_2 & & \\
\text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\
& x_2 & \leq & 3 \\
& 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\
& x_1,\, x_2 & \geq & 0 \\
& x_1,\, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Aufgabe H9.2 (6 Punkte) Das binäre Programm

$$\begin{array}{rrcll}
\min & \sum_{k=1}^{n} \delta_k & & & \\
\text{s.t.} & x_{ik} + x_{jk} & \leq & \delta_k & \text{für alle } \{i,j\} \in E \text{ und } k \in \{1, \ldots, n\} \\
& \sum_{k=1}^{n} x_{ik} & = & 1 & \text{für alle } i \in V \\
& x & \in & \{0,1\}^{n \times n} & \\
& \delta & \in & \{0,1\}^{n} &
\end{array}$$

Objekt i	Gewicht a_i	Wert w_i
1	3	12
2	4	12
3	3	9
4	3	15
5	15	90
6	13	26
7	16	112

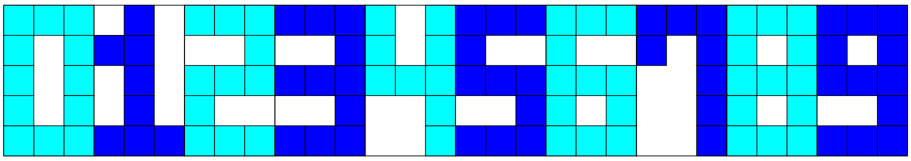
Tabelle 1: Die Werte a_i und w_i.

liefert die Färbungszahl des Graphen $G = (V, E)$. Eine *zulässige Färbung* eines Graphen ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, unterschiedliche Farben zugeordnet werden, das heißt, dass für alle Kanten $\{i, j\} \in E$ die Bedingung $f(i) \neq f(j)$ erfüllt ist. Die *Färbungszahl* ist die kleinstmögliche Anzahl von Farben, für die es eine zulässige Färbung gibt.

Warum ist diese Formulierung ungünstig um mit dem Branch & Bound-Verfahren gelöst zu werden?

Hinweis: Welche Auswirkungen hat die Symmetrie des Problems auf den Branch & Bound-Baum?

Aufgabe H9.3 (6 Punkte) Wir betrachten die digitale Darstellung der Ziffern 0-9 auf einem 5×3-Raster, wie sie in der Abbildung gezeigt wird.



In der abgebildeten Startkonfiguration berührt die Null mit zweien ihrer Quadrate die Eins. Die Eins berührt mit dreien ihrer Quadrate die Quadrate ihrer Nachbarn (mit zweien die Null und mit einem die Zwei), und so weiter. Die Neun berührt schließlich mit vier Quadraten ihren Nachbarn (die Acht).

Multipliziert man nun in einer vorliegenden Konfiguration jede Zahl mit der Anzahl der berührenden Quadrate und summiert alles auf, so erhält man für diese Konfiguration den „Score". In unserem Falle ist dies

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 4 = 277.$$

Finden Sie ein IP-Modell, dessen Optimallösung eine Umsortierung der Ziffern mit maximalem bzw. minimalem Score liefert.