Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010 17./18. Juni 2010

Diskrete Optimierung

8. Übungsblatt

Gruppenübungen

Aufgabe G8.1 Beweise folgende Aussage aus der Vorlesung:

Sei $P = P(A, b)$ mit A ganzzahlig und $Ax \leq b$ TDI. Sei ferner $F = \{x \mid Ax \leq b, ax = \beta\}$ mit a ganzzahlig und $\beta \in \mathbb{Z}$ eine Seite von P. Dann ist $Ax \leq b, ax = \beta$ TDI.

Hinweis: Siehe Schrijver, Theorem 22.2.

Aufgabe G8.2

Modelliere die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ jeweils als zulässigen Bereich eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms:

(a) $M_1 = \{(1,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (4,2)\}$

(b) $M_2 = ([0,1] \times \{1\}) \cup ([1,2] \times \{3\}) \cup ([2,3] \times \{2\}) \cup ([3,4] \times \{3\})$

(c) $M_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x_1 \leq 3,\ |x_1| \leq x_2 \leq |x_1| + 1\}$

312 22 Integral polyhedra and total dual integrality

has an integral optimum solution y for each integral c for which the minimum is finite.

In a sense, 'each face of a TDI-system is TDI again'. That is:

Theorem 22.2. *Let $Ax \leqslant b$; $ax \leqslant \beta$ be a TDI-system. Then the system $Ax \leqslant b$; $ax = \beta$ is also TDI.*

Proof. Let c be an integral vector, with

$$(7) \qquad \max\{cx \mid Ax \leqslant b; ax = \beta\} = \min\{yb + (\lambda - \mu)\beta \mid y \geqslant 0; \lambda, \mu \geqslant 0; yA + (\lambda - \mu)a = c\}$$

finite. Let $x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*$ attain these optima (possibly being fractional). Let $c' := c + \lceil \mu^* \rceil a$. Then the optima

$$(8) \qquad \max\{c'x \mid Ax \leqslant b; ax \leqslant \beta\} = \min\{yb + \lambda\beta \mid y \geqslant 0; \lambda \geqslant 0; yA + \lambda a = c'\}$$

are finite, since $x := x^*$ is a feasible solution for the maximum, and $y := y^*$, $\lambda := \lambda^* + \lceil \mu^* \rceil - \mu^*$ is a feasible solution for the minimum.

Since $Ax \leqslant b; ax \leqslant \beta$ is TDI, the minimum (8) has an integer optimum solution, say, $\tilde{y}, \tilde{\lambda}$. Then $y := \tilde{y}$, $\lambda := \tilde{\lambda}$, $\mu := \lceil \mu^* \rceil$ is an integer optimum solution for the minimum in (7): it is feasible in (7), and it is optimum as:

$$(9) \qquad \tilde{y}b + (\tilde{\lambda} - \lceil \mu^* \rceil)\beta = \tilde{y}b + \tilde{\lambda}\beta - \lceil \mu^* \rceil \beta \leqslant y^*b + (\lambda^* + \lceil \mu^* \rceil - \mu^*)\beta - \lceil \mu^* \rceil \beta = y^*b + (\lambda^* - \mu^*)\beta.$$

(Here $\leqslant$ follows from the fact that $y^*, \lambda^* + \lceil \mu^* \rceil - \mu^*$ is a feasible solution for the minimum in (8), and $\tilde{y}, \tilde{\lambda}$ is an optimum solution for this minimum.) So the minimum in (7) has an integral optimum solution. □

22.2. TWO COMBINATORIAL APPLICATIONS

To illustrate the notion of total dual integrality, we describe here two combinatorial applications.

Application 22.1. *Arborescences.* Let $D = (V, A)$ be a directed graph, and let r be a fixed vertex of D. An *r-arborescence* is a set A' of $|V| - 1$ arcs forming a spanning tree such that each vertex $v \neq r$ is entered by exactly one arc in A'. So for each vertex v there is a unique directed path in A' from r to v. An *r-cut* is an arc set of the form $\delta^-(U)$, for some nonempty subset U of $V \backslash \{r\}$. [As usual, $\delta^-(U)$ denotes the set of arcs entering U.]

It is not difficult to see that the r-arborescences are the inclusion-wise minimal sets of arcs intersecting all r-cuts. Conversely, the inclusion-wise minimal r-cuts are the inclusion-wise minimal sets of arcs intersecting all r-arborescences.

Fulkerson [1974] showed:

Theorem 22.3 (Optimum arborescence theorem). *For any 'length' function $l: A \to \mathbb{Z}_+$, the minimum length of an r-arborescence is equal to the maximum number t of r-cuts $C_1, \ldots, C_t$ (repetition allowed) so that no arc a is in more than $l(a)$ of these cuts.*

This result can be formulated in terms of integer linear programming as follows. Let C be the matrix with rows the incidence vectors of all r-cuts. So the columns of C are

Aufgabe G8.3 Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$ und $P(G)$ das zugehörige Stabile-Mengen-Polytop, d. h.

$$P(G) = \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid x_i + x_j \leq 1 \ \forall (i,j) \in E\}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $P(G)$ ist volldimensional.

(b) $P(G)$ ist *submonoton*, das heißt $x \in P(G)$ impliziert $y \in P(G)$ für alle $0 \leq y \leq x$. Alle nichttrivialen Facetten von $P(G)$ haben nichtnegative Koeffizienten, das heißt, wenn $a^T x \leq \alpha$ eine facettendefinierende Ungleichung ist, gilt $a \geq 0$. Nichttriviale Facetten sind diejenigen, die *nicht* durch die Ungleichung $x_j \geq 0$ induziert werden.

(c) Die Nichtnegativitätsbedingungen $x_j \geq 0$ induzieren Facetten von $P(G)$.

Hausübungen

Aufgabe H8.1 Löse folgendes Optimierungsprobleme mit Hilfe von Gomory-Schnitten:

$$(\mathrm{IP}) \quad \begin{array}{lrcl} \max & 4x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}, \end{array} \qquad (\mathrm{MIP}) \quad \begin{array}{lrcl} \max & 4x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 & \in & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Zur Lösung der LP-Relaxierungen kann eine Implementierung des Simplex-Algorithmus' genutzt werden (z. B. deine eigene Implementierung aus der Einführung in die Optimierung, `polymake` oder `CPLEX`).

Aufgabe H8.2 Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n$ sowie $l, u \in \mathbb{R}^n$. Formuliere das folgende Problem als gemischt-ganzzahliges Programm:

Maximiere $c^T x$ unter der Bedingung, dass mindestens k der Ungleichungen $A_i x \leq b_i$ $(1 \leq i \leq m)$ erfüllt sind, wobei $l \leq x \leq u$ gilt.

Aufgabe H8.3

(a) Sei $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid x + y \geq b\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeige, dass die Ungleichung

$$x \geq f \cdot (\lceil b \rceil - y)$$

gültig für P_1 ist.

(b) Sei $P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} \mid y \leq b + x\}$ und $f = b - \lfloor b \rfloor$. Zeige, dass die Ungleichung

$$y \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1 - f}$$

gültig für P_2 ist.