Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 10./11. 2010

Diskrete Optimierung

7. Übungsblatt

Gruppenübungen

Aufgabe G7.1 Sei $a \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $P_I := \operatorname{conv}\{x \in \mathbb{Z}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$. Weiter sei $k = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$ der größte gemeinsame Teiler der Komponenten von a.

Zeige mit Hilfe des ganzzahligen Analogon des Farkas-Lemmas (siehe Vorlesung), dass

$$P_I = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k} x_i \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Hinweis: Betrachte die folgenden beiden Mengen:

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\} \qquad \text{und} \qquad R := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} a^T x \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Aufgabe G7.2 Gegeben sei ein 0/1-Programm (P):

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \\ & x & \in & \{0,1\}^n. \end{array}$$

Zeige, dass jede 0/1-Lösung der LP-Relaxierung von (P) eine Ecke von $P(A,b) \cap [0,1]^n$ ist, das heißt jedes $x \in P(A,b) \cap \{0,1\}^n$ ist eine Ecke von $P(A,b) \cap [0,1]^n$.

Aufgabe G7.3 (6 Punkte) Gegeben sei die Familie ganzzahliger Programme mit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & & & x_2 & & \\ \text{s.t.} & kx_1 & + & x_2 & \leq & k \\ & -kx_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

mit den zugehörigen Polyedern P_k.

(a) Zeige, dass P_k^1 durch das folgende System beschrieben wird:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & & & x_2 & & \\ \text{s.t.} & (k-1)x_1 & + & x_2 & \leq & k-1 \\ & -(k-1)x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}. \end{array}$$

(b) Benutze die Ergebnisse aus Teil (a), um zu zeigen, dass in diesem Beispiel die Zahl t mit $t = \min_{s \in \mathbb{N}} P_k^s = (P_k)_I$ exponentiell in der Kodierungslänge der Eingabe (A,b) ist.

Hausübungen

Aufgabe H7.1 (6 Punkte) Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere das Polyeder P.

(b) Bestimme $P^1, \ldots, P^t$ (siehe Vorlesung), sodass $P^t = P_I$ gilt, und zeichne die Polyeder $P^1, \ldots, P^t$ in die Skizze ein.

Aufgabe H7.2 (6 Punkte) In dieser Aufgabe betrachten wir folgendes kombinatorisches Optimierungsproblem:

Cardinality-Bipartite-Matching-Problem	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ mit $X, Y \subset V$, so dass $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ und $E \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.
Frage:	Finde eine Kantenmenge $M \subseteq E$, so dass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endknoten haben und $\lvert M \rvert$ maximal ist.

Eine Studentin ist eine Woche zu Besuch in Berlin, um sich in dieser Zeit auf der Berlinale folgende Filme anzuschauen, die jedoch nur an den ausgewiesenen Tagen vorgestellt werden. Sie möchte so viele Filme wie möglich, allerdings maximal einen pro Tag sehen.

Film	**Vorstellungstage**
Skagafjördur	Montag, Samstag
The Garden	Montag, Samstag, Sonntag
Forty Shades of Blue	Montag, Dienstag, Mittwoch
Gender X	Montag, Freitag
Abordage	Mittwoch, Donnerstag
Wer ist Helene Schwarz?	Dienstag
Heaven‘s Gate	Freitag, Sonntag

(a) Stelle dieses Matching-Problem als bipartiten Graphen dar.

(b) Formuliere

- das ganzzahlige lineare Programm (ILP),
- das relaxierte lineare Programm (ohne die Ganzzahligkeitsbedingungen) (LP),
- das duale Programm zu (LP)

sowohl allgemein als auch für die obige Instanz.

(c) Berechne (z. B. mithilfe von `CPLEX`) die Optima für die in (b) formulierten Programme.

(d) Wie lässt sich das duale Problem graphentheoretisch interpretieren?

Aufgabe H7.3 (6 Punkte)

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei

$$P = \{x \in \{0,1\}^{\lvert E \rvert} \mid x \text{ ist ein Matching von } G\}$$

das Matching-Polytop von G und

$$P' := \left\{ x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \forall e \in E: \ x_e \geq 0, \forall v \in V: \sum_{\{e \in E | v \in e\}} x_e \leq 1 \right\}$$

die Lösung des relaxierten Ungleichungssystems.

Zeige: Ist G bipartit, so gilt $P = P'$.

(b) Visualisiere mithilfe von `polymake` die Matching-Polytope für zusammenhängende Graphen mit genau drei Kanten.