Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 27./28. Mai 2010

Diskrete Optimierung

6. Übungsblatt

Nächste Woche (3./4. Juni) fällt die Übung aufgrund des Feiertags aus. (Vorlesungen und Sprechstunden finden aber wie gewohnt statt.) Abgabetermin für die Hausaufgaben ist in der nächsten Übung am 10./11. Juni. (Für manche Hausaufgaben wird der Stoff der Vorlesungen nächste Woche benötigt.)

Gruppenübungen

Aufgabe G6.1 Zeige, dass eine ganzzahlige Matrix A genau dann total unimodular ist, wenn das System $Ax \leq b$, $x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Aufgabe G6.2 Beweise folgenden Satz aus der Vorlesung:

Sei $(D'; s, t)$ ein Netzwerk und $\delta^-(U)$ wie in der Vorlesung definiert. Dann ist $\delta^-(U)$ ein (s, t)-Schnitt.

Aufgabe G6.3

Gegeben sei das Polyeder

$$P = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimme ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit A und b ganzzahlig, welches TDI ist, so dass $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

Ist dein System eine minimale Beschreibung von P?

Hausübungen

Abgabe am 10./11. Juni

Aufgabe H6.1 (6 Punkte) Gegeben seien die Ungleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Begründe, warum diese beiden Systeme dasselbe Polyeder definieren.

Sind die Systeme jeweils TDI?

Aufgabe H6.2 (6 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{Z}^n$ ein ganzzahliger Vektor und $\beta \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Zeige, dass die Ungleichung $ax \leq \beta$ genau dann TDI ist, wenn die Einträge von a teilerfremd sind.

(b) Sei $Ax \leq b$ TDI, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$ eine rationale Zahl. Zeige, dass $\frac{1}{k}Ax \leq \alpha b$ ebenfalls TDI ist.

Aufgabe H6.3 (6 Punkte) Standardeisenstäbe der Länge b sollen so zerteilt werden, dass man k_i Stäbe der Länge $\alpha_i \leq b$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ erhält, wobei die Anzahl der verwendeten Standardstäbe möglichst klein sein soll.

Formuliere dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm für den Fall,

(a) dass die Standardstäbe zerschnitten werden,

(b) dass die Standardstäbe zersägt werden, wobei bei jedem Zersägen die Länge c verloren geht.

Aufgabe H6.4 (6 Punkte) Löse das ganzzahlige lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H6.5 (6 Punkte) Sei $X = \{x \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\}$ mit $a_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n, b \geq 0$. Dann nennen wir $P = \operatorname{conv}(X)$ das 0/1-*Knapsack-Polytop.*

(a) Bestimme für $n = 3$ die Ecken und Facetten des 0/1-Knapsack-Polytopes für $a_1 = 7, a_2 = 5, a_3 = 4$ und $b = 10$.

(b) Zeige, dass die Dimension von P

$$\dim(P) = n - |\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid a_j > b\}|$$

ist.

(c) Wann ist eine Ungleichung $x_j \leq 1$ facettendefinierend für P?