**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 20./21. April 2010

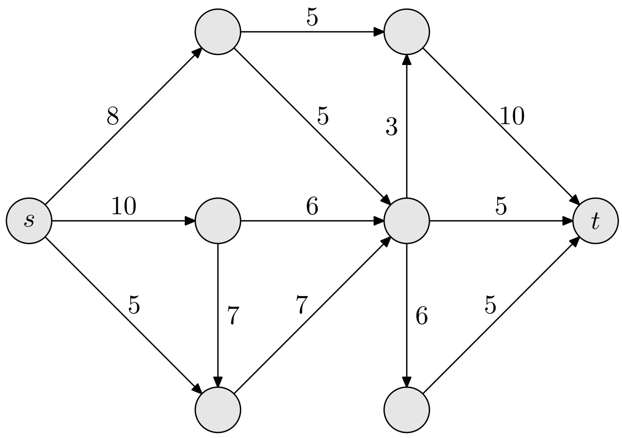
# Diskrete Optimierung

## 5. Übungsblatt

### Gruppenübungen

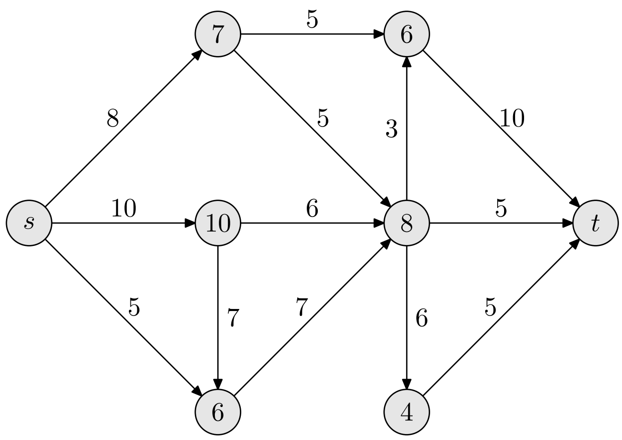
**Aufgabe G5.1**

(a) Finde einen maximalen $(s,t)$-Fluss und einen minimalen $(s,t)$-Cut im folgenden Netzwerk:




(b) Nun gibt es zusätzlich zu den Kantenkapazitäten auch noch *Eckenkapazitäten*, d. h. der Fluss durch die Ecken wird beschränkt.

Finde wieder einen maximalen $(s,t)$-Fluss und einen minimalen $(s,t)$-Cut im folgenden Netzwerk mit den angegebenen Eckenkapazitäten:




*Hinweis:* In einem Netzwerk mit Eckenkapazitäten ist ein $(s,t)$-Cut eine Menge $C$ von Kanten und Ecken, sodass jeder gerichtete Pfad von $s$ nach $t$ ein Element aus $C$ enthält.

**Aufgabe G5.2** Zeige folgendes hinreichendes Kriterium für totale Unimodularität:

Eine Matrix $A \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$ ist total unimodular, falls

- höchstens zwei Einträge in jeder Spalte ungleich 0 sind,
- die Zeilen in zwei disjunkte Mengen $I_1, I_2$ aufgeteilt werden können, sodass:
  - Hat eine Spalte zwei Einträge mit gleichen Vorzeichen, so liegen die entsprechenden Zeilen in verschiedenen $I_j$.
  - Hat eine Spalte zwei Einträge mit verschiedenen Vorzeichen, so liegen die entsprechenden Zeilen in gleichen $I_j$.

Folgere, dass die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix $A$ eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ total unimodular ist.

**Aufgabe G5.3** Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $C$ ein ungerader Kreis in $G$. Betrachte das lineare Programm

$$\max\{c^T x \mid 0 \leq x,\ x_i + x_j \leq 1\ \forall\{i, j\} \in E\}$$

für $c = \chi^{V(C)}$. Dabei ist $V(C)$ die Eckenmenge von $C$ und $\chi^{V(C)} = (c_1, \ldots, c_{|V|})$ mit

$$c_i := \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in V(C) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* von $V(C)$.

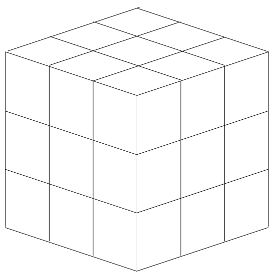
Zeige:

(a) $x_i^* = \frac{1}{2}$ für alle Knoten $i \in V(C)$, $x_i^* = 0$ für $i \notin V(C)$ löst das lineare Programm.

(b) $x^*$ ist keine Konvexkombination von Inzidenzvektoren von stabilen Mengen in $G$.

**Aufgabe G5.4** 27 kleine Würfel sollen zu einem großen $(3 \times 3 \times 3)$-Würfel (siehe Abbildung) zusammengesetzt werden. In dem großen Würfel nennen wir drei kleine Würfel eine *Linie*, falls sie parallel zu einer Kante des großen Würfels aufgereiht liegen, eine Diagonale parallel zu einer der Seitenflächen des großen Würfels bilden, oder eine Raumdiagonale in dem großen Würfel bilden.

*Hinweis:* Es gibt hier insgesamt 49 Linien.



Wir suchen nun eine Anordnung von 13 kleinen weißen und 14 kleinen schwarzen Würfeln mit möglichst wenigen Linien, welche aus gleichfarbigen Würfeln bestehen.

Formuliere ein ganzzahliges Programm zur Lösung dieses Problems.

## Hausübungen

**Aufgabe H5.1 (6 Punkte)**
Betrachte die beiden folgenden Verknüpfungen auf $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\begin{array}{rcccl} \oplus & : & (x, y) & \mapsto & \min\{x, y\} \\ \odot & : & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

(a) Zeige, dass $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus)$ und $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \odot)$ kommutative Halbgruppen mit Einselement (Monoide) sind, die außerdem das Distributivgesetz erfüllen. Das Tupel $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \odot)$ heißt *tropischer Halbring.*

Für zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{ij} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{k \times m}$ und $B \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{m \times n}$ ist dann das *tropische Matrizenprodukt* definert durch

$$(A \odot B)_{ij} := (a_{i1} \odot b_{1j}) \oplus (a_{i2} \odot b_{2j}) \oplus \ldots \oplus (a_{im} \odot b_{mj}).$$

Entsprechend werden *tropische Matrixpotenzen* definiert durch

$$A^{\odot 1} := A, \quad A^{\odot k+1} := A \odot A^{\odot k}.$$

Weiter sei $\Gamma = (\{1, \ldots, n\}, A)$ ein (gerichteter) Graph, in dem jeder Kante $(i,j) \in A$ ein Gewicht $w_{ij} \in \mathbb{R}_+$ zugeordnet wird. Setze

$$A_\Gamma := (a_{ij})_{ij} \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \quad \text{wobei } a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{falls } (i,j) \in A, \\ 0, & \text{falls } i = j, \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Zeige, dass der Eintrag von $A_\Gamma^{\odot n-1}$ in Zeile $i$ und Spalte $j$ genau die Länge eines kürzesten Weges vom Knoten $i$ zum Knoten $j$ ist.

*Hinweis:* Die Länge eines Weges in $\Gamma$ ist die Summe der Gewichte seiner Kanten.

**Aufgabe H5.2 (6 Punkte)**

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem:

EQUALITY-KNAPSACK

| | |
|---|---|
| *Instanz:* | $a_i, w_i \in \mathbb{R}_+$ mit $i = 1, \ldots, n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. |
| *Frage:* | Finde $x \in \mathbb{N}^n$, so dass $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ maximal ist und $\sum_{i=1}^n w_i x_i = \lambda$ gilt. |

(a) Berechne mithilfe von `CPLEX` ein Optimum für die Instanz $I$ mit $n = 5$, $a = (213, -1928, -11111, -2345, 9123)$, $w = (12223, 12224, 36674, 611, 85569)$ und $\lambda = 89643482$.

(b) Betrachte nun das entsprechende relaxierte UNBOUNDED-KNAPSACK-Problem, d. h. $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq \lambda$ und $x_i \in \mathbb{R}_+$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Stelle für $I$ das resultierende KNAPSACK-Polytop mithilfe von `polymake` graphisch dar.

Hierbei könnten die Funktionen/Methoden `facet`, `projection_full`, `projection`, `DUAL_GRAPH` und `VISUAL` hilfreich sein.

(c) Berechne mithilfe von `polymake` ein Optimum für das relaxierte Problem.

*Hinweis:* Eine Dokumentation von `CPLEX` findet man zum Beispiel im Verzeichnis `/opt/cplex/cplex121/doc/pdf/`.

Die `polymake`-Funktionen/Methoden sind in der `polymake`-Dokumentation (`http://wwwopt.mathematik.tu-darmstadt.de/polymake_doku/2.9.8`) dokumentiert. Außerdem könnte das ILP-Tutorial (auf der Kurshomepage verlinkt) hilfreich sein.

**Aufgabe H5.3 (6 Punkte)**

Zeige: Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.