Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 6./7. Mai 2010

Diskrete Optimierung

4. Übungsblatt

Nächste Woche (13./14. Mai) fällt die Übung aufgrund des Feiertags aus. (Vorlesungen und Sprechstunden finden aber wie gewohnt statt.) Abgabetermin für die Hausaufgaben ist in der nächsten Übung am 20./21. Mai. (Für manche Hausaufgaben wird der Stoff der Vorlesungen nächste Woche benötigt.)

Gruppenübungen

Aufgabe G4.1 Beweise folgenden Satz aus der Vorlesung:

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polyeder der Facettenkomplexität φ. Dann hat P_I Facettenkomplexität $\leq 24n^5\varphi$.

Hinweis: Siehe Schrijver, Corollary 17.1a.

Aufgabe G4.2 Betrachte folgendes Entscheidungsproblem:

STABLE SET	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ ungerichtet, $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G eine stabile Menge (d. h. keine zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden) der Größe k?

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass STABLE SET $\mathcal{NP}$-vollständig ist, indem das aus der Vorlesung bekannte Entscheidungsproblem SAT auf STABLE SET reduziert wird.

(a) Zeige: STABLE SET $\in \mathcal{NP}$, d. h. gib ein Zertifikat für eine Ja-Instanz an.

(b) Betrachte folgende Instanz I von SAT: m Klausen $Z_1, \ldots, Z_m$ mit $Z_i = y_{i_1} \vee \ldots \vee y_{i_{k_i}}$ mit Literalen y_{i_j} in Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Konstruiere (in polynomialer Zeit) einen Graphen G zu I und $k \in \mathbb{N}$, der genau dann eine stabile Menge der Größe k besitzt, wenn es für I eine erfüllende Belegung gibt.

Aufgabe G4.3 Zeige, dass jedes Polytop eine Projektion eines Simplex ist.

Hausübungen

Abgabe am 20./21. Mai

Aufgabe H4.1 (6 Punkte) Betrachte folgendes Entscheidungsproblem:

VERTEX COVER	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ ungerichtet, $m \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G ein *Vertex Cover* (d. h. eine Menge $S \subseteq V$, sodass jede Kante $e \in E$ mit mindestens einer Ecke in S inzident ist) der Größe m?

Zeige:

(a) Vertex Cover $\leq_p$ Stable Set

(b) Stable Set $\leq_p$ Vertex Cover

Aufgabe H4.2 (6 Punkte) Sei A eine ganzzahlige $(m \times n)$-Matrix und b ein ganzzahliger Vektor.

Zeige:

Das Polyeder $P = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ ist ganzzahlig genau dann, wenn das Polyeder $\tilde{P} = \{(x,z)^T \mid [A\ I](x,z)^T = b,\ x, z \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Aufgabe H4.3 (6 Punkte) Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zeige:

(a) A ist genau denn total unimodular, wenn $[A, I]$ unimodular ist.

(b) A ist genau denn total unimodular, wenn $\begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{bmatrix}$ total unimodular ist.

(c) A ist genau denn total unimodular, wenn A^T total unimodular ist.

Aufgabe H4.4 (6 Punkte) Zeige, dass die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen total unimodular ist.

Hinweis: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls $X, Y \neq \emptyset$ existieren mit $V = X \dot{\cup} Y$ und $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v \in X, w \in Y\}$.

Die *Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix* von G ist die Matrix $A = (a_{ij})_{i \in V, j \in E}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

where $x_1,\dots,x_t,y_1,\dots,y_s$ are integral vectors with all components at most $(n+1)\Delta$ in absolute value, where Δ is the maximum absolute value of the subdeterminants of the matrix $[A\ \ b]$.

Proof. The proof is parallel to that of Theorem 16.1. The case $P_I=\emptyset$ being trivial, assume $P_I\neq\emptyset$. By Theorem 16.1 and Cramer's rule we can write char.cone $P_I=$ char.cone $P=\text{cone}\{y_1,\dots,y_s\}$, where $y_1,\dots,y_s$ are integral vectors with each component being a subdeterminant of A—in particular each component is at most Δ in absolute value.

Moreover

(2) $$P=\text{conv.hull}\{z_1,\dots,z_k\}+\text{cone}\{y_1,\dots,y_s\}$$

where $z_1,\dots,z_k$ are vectors with each component being a quotient of subdeterminants of the matrix $[A\ \ b]$—in particular, each component is at most Δ in absolute value. Now let $x_1,\dots,x_t$ be the integral vectors contained in

(3) $$\text{conv.hull}\{z_1,\dots,z_k\}+\{\mu_1y_1+\dots+\mu_sy_s\,|\,0\leqslant\mu_j\leqslant 1\ (j=1,\dots,s);\ \text{at most } n \text{ of the } \mu_j \text{ are nonzero}\}.$$

Then each component of each x_i is at most $(n+1)\Delta$ in absolute value. Moreover, (1) holds. To see this, we have to show that each minimal face F of P_I contains at least one x_i. Any such F certainly contains an integral vector, say x^*. As x^* belongs to P, we can write

(4) $$x^*=\lambda_1z_1+\dots+\lambda_kz_k+\mu_1y_1+\dots+\mu_sy_s$$

where $\lambda_1,\dots,\lambda_k,\mu_1,\dots,\mu_s\geqslant 0$, $\lambda_1+\dots+\lambda_k=1$, and at most n of the μ_j nonzero (by Carathéodory's theorem (Corollary 7.1i)). Then

(5) $$\tilde{x}:=\lambda_1z_1+\dots+\lambda_kz_k+(\mu_1-\lfloor\mu_1\rfloor)y_1+\dots+(\mu_s-\lfloor\mu_s\rfloor)y_s$$

is again an integral vector in F, as one easily checks. Moreover, it is one of the x_i, which proves our claim. □

Corollary 17.1a. *Let P be a rational polyhedron in $\mathbb{R}^n$ of facet complexity φ. Then P_I has facet complexity at most $24n^5\varphi$.*

Proof. Let $P=\{x\,|\,Ax\leqslant b\}$, where each row of $[A\ \ b]$ has size at most φ. Each inequality $ax\leqslant\beta$ in $Ax\leqslant b$ can be multiplied by the product of the denominators in $ax\leqslant\beta$, which is at most 2^φ, to obtain an equivalent integral inequality of size at most $(n+1)\varphi$. In this way we obtain the inequality system $\tilde{A}x\leqslant\tilde{b}$. Each submatrix of $[\tilde{A}\ \ \tilde{b}]$ has size at most $(n+1)^2\varphi$, and hence, by Theorem 3.2, the size of the largest absolute value Δ of subdeterminants of $[\tilde{A}\ \ \tilde{b}]$ is at most $2(n+1)^2\varphi$. So $\Delta\leqslant 2^{2(n+1)^2\varphi}$. Hence, by Theorem 17.1, there exist integral vectors $x_1,\dots,x_t,y_1,\dots,y_s$ such that

(6) $$P_I=\text{conv.hull}\{x_1,\dots,x_t\}+\text{cone}\{y_1,\dots,y_s\}$$

where each component of each x_i,y_j is at most $(n+1)\Delta$ in absolute value, and

hence has size at most $2(n+1)^2\varphi+\lceil\log_2(n+1)\rceil+3$. Therefore, for each i

(7) $$\text{size}(x_i)\leqslant n+n(2(n+1)^2\varphi+\lceil\log_2(n+1)\rceil+3)\leqslant 6n^3\varphi.$$

Similarly for the y_j. So the vertex complexity of P_I is at most $6n^3\varphi$, and hence, by Theorem 10.2, the facet complexity of P_I is at most $24n^5\varphi$. □

Another consequence of Theorem 17.1 is that if a polyhedron contains integral vectors, it contains integral vectors of small size (cf. Borosh and Treybig [1976, 1979], Cook [1976], von zur Gathen and Sieveking [1978], Kannan [1976], Kannan and Monma [1978], and Papadimitriou [1981]).

Corollary 17.1b. *Let P be a rational polyhedron in $\mathbb{R}^n$ of facet complexity φ. If P contains an integral vector, it contains one of size at most $6n^3\varphi$.*

Proof. Cf. the proof of Corollary 17.1a. □

So by enumeration we can find an integral vector x satisfying $Ax\leqslant b$, or decide that no such vector exists, in finite time.

Corollary 17.1c. *Let P be a rational polyhedron in $\mathbb{R}^n$ of facet complexity φ, and let $c\in\mathbb{Q}^n$. If $\max\{cx\,|\,x\in P;\ x \text{ integral}\}$ is finite, it is attained by a vector of size at most $6n^3\varphi$.*

Proof. Cf. the proof of Theorem 17.1: the maximum is attained by one of the vectors x_i. □

Corollary 17.1d. *The integer linear programming problem belongs to $\mathcal{NP}$.*

Proof. It follows from Corollary 17.1b that if a system of rational linear inequalities $Ax\leqslant b$ has an integral solution, it has one of size polynomially bounded by size(A,b). [Similarly, if $Ax=b$ has a nonnegative integral solution, it has one of size polynomially bounded by size(A,b).] □

17.2. DISTANCES OF OPTIMUM SOLUTIONS

We first give an estimate on the proximity of ILP-solutions and solutions of the corresponding LP-relaxation. It is due to Cook, Gerards, Schrijver, and Tardos [1986], and strengthens a result of Blair and Jeroslow [1979: Thm 1.2].

Theorem 17.2. *Let A be an integral $m\times n$-matrix, such that each subdeterminant is at most Δ in absolute value, and let b and c be vectors. Suppose that*

(8) *both* (i) $\max\{cx\,|\,Ax\leqslant b\}$
and (ii) $\max\{cx\,|\,Ax\leqslant b;\ x \text{ integral}\}$

are finite. Then: