Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 29./30. April 2010

Diskrete Optimierung

3. Übungsblatt

Gruppenübungen

Aufgabe G3.1 Betrachte den Kegel C, der von $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt wird. Bestimme mit Hilfe eines linearen Programms, ob C spitz ist.

Aufgabe G3.2 Erinnere dich an das Rucksack-Problem aus der Vorlesung: Du willst eine Wanderung machen. Es kommen N verschiedene Gegenstände infrage, die du vielleicht mitnehmen willst. Leider hat dein Rucksack nur eine begrenzte Kapazität G. Jeder Gegenstand j hat ein Gewicht g_j und einen Nutzten n_j. Du willst den Nutzten deines Rucksackinhalts maximieren.

(a) Modelliere das Problem als ILP.

(b) Wie modelliert man, dass ein Gegenstand A nur einen Nutzen hat, wenn du B auch dabei hast?

(c) Wie modelliert man, dass du zwei Gegenständen C und D nicht gleichzeitig mitnehmen willst?

Aufgabe G3.3 Geben Sie Ungleichungsformulierung des Satzes von Caratheodory an.

Aufgabe G3.4 Gegeben sei die Knapsack-Ungleichung $\sum_{i=1}^n a_i x_i \le b$.
Wir betrachten die beiden Polytope

$$P := \operatorname{conv}\left\{ x \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \le b \right\} \quad \text{und}$$
$$S := \operatorname{conv}\left\{ x \in \{0,1\}^n \mid x \text{ ist eine Lösung des gegebenen Rucksackproblems} \right\}.$$

(a) Zeige: $S \subset P$.

(b) Gilt auch $P \subset S$?

Hausübungen

Aufgabe H3.1 (6 Punkte) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Eine Menge $S \subseteq C$ heißt *Erzeugendensystem* für C, falls $\operatorname{cone}(S) = C$. Ist S minimal (bzgl. Mengeninklusion), so heißt S *Kegelbasis*.

(a) Gib zwei Kegelbasen des $\mathbb{R}^2$ unterschiedlicher Kardinalität an.

(b) Zeige: Eine Menge S ist genau dann eine Kegelbasis für einen Kegel C, wenn $\operatorname{cone}(S) = C$ und $s \notin \operatorname{cone}(S - \{s\})$ für alle $s \in S$ gilt.

(c) Gibt es im $\mathbb{R}^n$ Kegel mit Kegelbasen unendlicher Kardinalität?

Aufgabe H3.2 (6 Punkte) Für $n \geq 1$ betrachte das Ungleichungssystem

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i \leq |I| - 1 \qquad \text{für } I \subseteq [n]. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass (1) keine ganzzahlige Lösung hat.

(b) Zeige, dass jedes Ungleichungssystem, das man erhält, indem man mindestens eine Ungleichung aus (1) streicht, eine ganzzahlige Lösung hat.

Aufgabe H3.3 (6 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \in O(g) \quad :\Leftrightarrow \quad & \exists\, c > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \\ & f(n) \leq c \cdot g(n) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}f \text{ wächst höchstens so stark wie } g.\text{“} \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}g \text{ ist eine obere Schranke für } f.\text{“} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \in o(g) \quad :\Leftrightarrow \quad & \forall\, c > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \\ & 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}f \text{ wächst echt langsamer als } g.\text{“} \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}g \text{ ist eine echte obere Schranke für } f.\text{“} \end{aligned}$$

(a) Seien $f(n) = 2n^2 + 7n - 10$ und $g(n) = n^2$. Zeige $f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in O(f(n))$. Wie muss man c und n_0 jeweils wählen?

(b) Zeige:

$$f \in O(g(n)) \text{ und } g \in O(h(n)) \Rightarrow f \in O(h(n))$$

und

$$f \in o(g(n)) \text{ und } g \in o(h(n)) \Rightarrow f \in o(h(n)).$$

(c) Sortiere die Funktionen

$$n^2,\ \sqrt{n},\ n!,\ \log n,\ 2^n,\ n^n,\ n$$

nach aufsteigender Komplexität unter Verwendung der „O“- und „o“-Notation. Bestimme jeweils n_0.