Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 22./23. April 2010

Diskrete Optimierung

2. Übungsblatt

Gruppenübungen

Aufgabe G2.1 Betrachte den Kegel $C \subset \mathbb{R}^2$, der gegeben ist durch

$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_2 &\leq 0 \\ -4x_1 - 3x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Bestimme zeichnerisch eine minimale, ganzzahlige Hilbertbasis von C.

Aufgabe G2.2 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationaler, polyedrischer und spitzer Kegel und sei $H(C)$ die eindeutige minimale, ganzzahlige Hilbertbasis des Kegels C. Weiterhin sei $F \subseteq C$ eine nichtleere Seitenfläche des Kegels C.

Zeige: $H(F) := F \cap H(C)$ ist die eindeutige minimale, ganzzahlige Hilbertbasis von F.

Aufgabe G2.3

Gegeben sei ein zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$.

Gesucht ist ein minimaler aufspannender Baum von G, d. h. eine Kantenmenge $T \subseteq E$ mit $w(T) = \min_{S \subseteq E} w(S)$, wobei $G_T = (V, T)$ zusammenhängend und kreisfrei ist.

Formuliere ein ganzzahliges Programm zur Modellierung dieses Problems.

Aufgabe G2.4 Ein *Zonotop* Z ist die Minkowskisumme von Streckenabschnitten:

$$\begin{aligned} Z &= [p_1, q_1] + [p_2, q_2] + \cdots + [p_k, q_k] \\ &= \{r_1 + r_2 + \ldots + r_k \mid r_i \in [p_i, q_i]\}. \end{aligned}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, andere Darstellungsweisen von Zonotopen kennenzulernen.

(a) Zeige, dass ein Zonotop das Bild einer affinen Projektion des Einheitswürfels ist.

(b) Zeige, dass jedes Zonotop zentralsymmetrisch ist und dass Seiten von Zonotopen wieder Zonotope sind.

(c) Gib ein Polytop an, dass kombinatorisch äquivalent zum Würfel (d. h. die Seitenverbände sind isomorph), jedoch kein Zonotop ist.

(d) Betrachte die folgende endliche Familie von linearen Hyperebenen:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}} := \{H_1, \ldots, H_p\} \in \mathbb{R}^d, \text{ wobei } H_i := \{x \in \mathbb{R}^d : {v_i}^T x = 0\}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Seitenverband des Zonotops $Z = [-v_1, v_1] + [-v_2, v_2] + \cdots + [-v_p, v_p]$ und dem Hyperebenenarrangement $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$?

Hausübungen

Aufgabe H2.1 (6 Punkte) Gegeben sei das Polyeder $P \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$
\begin{aligned}
-10x_1 - 6x_2 &\leq -15 \\
2x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\
6x_1 - 4x_2 &\leq 9.
\end{aligned}
$$

(a) Skizziere P in der Ebene und markiere alle ganzzahligen Punkte in P. (Wähle einen nicht zu kleinen Maßstab.)

(b) Bestimme zeichnerisch $P_I := \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^2)$.

(c) Gib eine Menge von Ungleichungen an, die P_I beschreibt.

Aufgabe H2.2 (6 Punkte) Seien $N \subset \mathbb{R}^n$ und $M \subset \mathbb{R}^m$ zwei Polytope mit den Eckenmengen $\mathcal{V}(N)$ und $\mathcal{V}(M)$ sowie den Facettenmengen $\mathcal{F}(N)$ und $\mathcal{F}(M)$.

(a) Zeige, dass das (kartesische) Produkt $N \times M := \{(n, m) \mid n \in N, m \in M\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ wiederum ein Polytop ist.

(b) Gib die Ecken $\mathcal{V}(N \times M)$ und Facetten $\mathcal{F}(N \times M)$ von $N \times M$ an.

Aufgabe H2.3 (6 Punkte) Sei P ein rationales Polyeder. Dann sind äquivalent:

(a) $P = P_I$

(b) Jede Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(c) Jede minimale Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(d) $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ wird von einem ganzzahligen Punkt angenommen für alle $c \in \mathbb{R}^n$, für die das Maximum endlich ist.