**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Michael Joswig
Silke Möser

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 15./16. April 2010

# Diskrete Optimierung

## 1. Übungsblatt

### Gruppenübungen

**Aufgabe G1.1** Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$
(P) \qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Formuliere das duale Problem zu $(P)$.

(b) Prüfe mit Hilfe des Satzes von komplementären Schlupf, ob $\bar{x} = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)^T$ eine Optimallösung von $(P)$ ist.

**Aufgabe G1.2** Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Zeige:

(a) $P$ hat endlich viele Ecken.

(b) Ein Punkt $x \in P$ ist genau dann eine Ecke von $P$, wenn $P \setminus \{x\}$ konvex ist.

(c) Sei $F$ eine Seitenfläche von $P$. Dann entsprechen die Ecken von $F$ genau den Ecken von $P$, die in $F$ enthalten sind.

(d) Eine Kante von $P$ verbindet zwei Ecken von $P$.

**Aufgabe G1.3** Ein 0/1-*Polytop* ist die konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{0,1\}^d$, der Eckenmenge des $d$-Würfels.

Zwei 0/1-Polytope heißen 0/1-*äquivalent*, falls man sie durch eine Symmetrie des $d$-Würfels ineinander überführen kann.

Klassifiziere alle 3-dimensionalen 0/1-Polytope (bis auf 0/1-Äquivalenz).

**Aufgabe G1.4** Die beiden Polytope $P_1$ und $P_2$ seien definiert als konvexe Hülle der Zeilenvektoren der folgenden Matrizen:

$$
P_1 = \operatorname{conv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \operatorname{conv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Zeige, $P_1$ und $P_2$ sind kongruent, aber nicht 0/1-äquivalent.

## Hausübungen

**Aufgabe H1.1 (6 Punkte)** Betrachte die beiden zueinander dualen linearen Programme:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & c^T x & & \\
\text{s.t.} & Ax & \leq & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrcl}
\min & b^T y & & \\
\text{s.t.} & A^T y & \geq & c \\
 & y & \geq & 0
\end{array}
$$

Gib für jede mögliche Kombination in Hinblick auf die Lösbarkeit der beiden linearen Programme („endlich", „unbeschränkt", „unzulässig") ein Beispiel.

**Aufgabe H1.2 (6 Punkte)** Löse mit dem Simplex-Algorithmus:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
 & 3x_1 & - & 5x_2 & & & = & 4 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Benutze die Phase I des Simplex-Algorithmus um eine zulässige Basislösung zu finden.

**Aufgabe H1.3 (6 Punkte)** Für $1 \leq k \leq d$ ist der *Hypersimplex* $\Delta_d(k)$ definert durch

$$\Delta_d(k) := \{x \in [0,1]^d \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_d = k\}.$$

$\Delta_d(1)$ ist ein $(d-1)$-dimensionaler Simplex im $\mathbb{R}^d$.

Bestimme die $f$-Vektoren von $\Delta_3(2)$, $\Delta_4(2)$ und die Anzahl der Ecken und Facetten von $\Delta_5(2)$.

*Hinweis:* Zur Lösung dieser Aufgabe ist es erlaubt, `polymake` zu benutzen.