Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
28.02.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 1 *(7 Punkte)*

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe liegt bei 0.

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

b) Ist das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eindeutig lösbar, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist das Bild von A genau $\mathbb{R}^n$.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det(A) = 0$. Dann ist $\operatorname{rank}(f_A) = 0$.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

d) Seien B, B_1 zwei verschiedene Basen von $\mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt immer $\det([A]_B^B) \neq \det([A]_{B_1}^{B_1})$.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

e) Es gibt einen nichttrivialen Vektorraum, in dem es nur zwei Vektoren gibt.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

f) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ein System von Fundamentallösungen von $A \cdot x = 0$ ist eine Basis von $\ker f_A$.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

g) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist $\det(A) \neq 0$.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

Aufgabe 2 *(7 Punkte)*

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix A zu f und $\operatorname{rank} f$.

b) Bestimmen Sie ein System von Fundamentallösungen von $f(x) = 0$.

b) Bestimmen Sie das Urbild des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. der Abbildung f.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Bestimmen Sie bezüglich geeigneter Basen im Bild- und Urbildraum die Matrix für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad \ker f = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Ist f eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4 *(6 Punkte)*

Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die nicht vielfache der Einheitsmatrix sind, so dass

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*

Sei $A \in \mathbb{R}^2$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$.

b) Ist A invertierbar, so gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$