Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
12.02.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

8. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 18 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ hat immer eine Lösung für alle A.

2) Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

3) Falls A invertierbar ist, so bilden alle Spaltenvektoren von A eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

4) Falls A invertierbar ist, so bilden alle Spaltenvektoren von A^t eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

5) Falls das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ eine eindeutige Lösung hat, so ist x nichts anders als b bzgl. der Basis, die aus den Spaltenvektoren aus A besteht.

6) Seien B_0, B_1 Basen von $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Basistransformation von B_0 nach B_1 eine lineare Abbildung, die den Rang n hat, und somit bijektiv ist.

Aufgabe 19 – Matrizen, Basen:

Gegeben sei $B := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \right\}$

a) Zeigen Sie: B ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

b) Schreiben Sie den Vektor $b := (4, 6, 6, 4)^t$ als Koordinatenvektor bzgl. B.

c) Gegeben sei ein Vektor $c := (1, 2, 3, 4)^t_B$ bzgl. der Basis B. Stellen Sie den Vektor c bzgl. der Standardbasis dar. Geben Sie die Transformationsmatrix von B nach der Standardbasis an.

d) Gibt es eine Basis, bezüglich deren der Vektor $b := (4, 6, 6, 4)^t$ die Darstellung $(1, 0, 0, 0)^t$ hat?

Aufgabe 20 – Drehmatrizen in $\mathbb{R}^2$:

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (-y, x)$$

1) Bestimmen Sie die Matrix A zu f.

2) Interpretieren Sie die Abbildung f geometrisch.