Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
29.01.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

7. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 15 – Minitest:

In dieser Aufgabe seien V, W reelle Vektorräume über $\mathbb{R}$, wobei V die Dimension $n > 0$ und W die Dimension $m > 0$ hat.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $m > n$ ist, gibt es eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$.

2) Falls $m < n$ ist, so existiert eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$.

3) Falls $m = n$ ist und die lineare Abbildung $f\colon V \to W$ hat $\ker(f) = \{0\}$, dann ist f surjektiv und bijektiv.

4) Falls $m \neq n$ ist, existiert es ein Isomorphismus zwischen V und W.

5) Die Dimensionsformel gilt nur für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen.

6) Sei B_0 eine Basis von V und B_1 eine Basis von W. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutig bestimmte $n \times m$ Matrix A bzgl. B_0 und B_1.

Aufgabe 16 – Lineare Abbildungen:

a) Geben Sie einen unendlich dimensionalen Vektorraum V an.

b) Geben Sie eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.

c) Geben Sie eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ an, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 17 – Lineare Abbildungen:

Gegeben sei ein Körper $\mathbb{R}$ und die Polynome $1, x, x^2, x^3, x^4\colon \ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Die Menge $V := \text{lin}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $B := \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

b) Schreiben Sie den Vektor $v = 5x^2 + 2x + 3 \in V$ als Koordinatenvektor bzgl. B.

c) Sei $f := \frac{d}{dx}$ die erste Ableitung nach x. Zeigen Sie: $f\colon V \to V$ ist eine lineare Abbildung.

d Geben Sie die Abbildung f in Matrixform bzgl. der Basis B an.

e) Ist f injektiv bzw. surjektiv?

Hausaufgabe 15 – Lineare Abbildungen:

Sei $(v_1, .., v_n)$ eine Basis eines Vektorraums V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Lin}(f(v_1), ..., f(v_n)) = \mathrm{Im}\, f$.

b) f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Rang}\, f = \dim W$.

c) f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $(f(v_1), ..., f(v_n))$ sind linear unabhängig.

Hausaufgabe 16 – Rechnen mit Matrizen:

Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung, die durch folgende Matrix beschrieben wird.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 17 – Transponierte und Rang einer Matrix:

Seien $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wobei $l, m, n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie:

a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

b) Der Zeilenrang von A ist gleich dem Rang von A.