Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
15.01.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum und W ein m-dimensionaler Vektorraum über demselben Körper $\mathbb{K}$. Ferner sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) $\mathrm{Ker}(f) =$

b) $\mathrm{Im}(f) =$

c) Geben Sie die Dimensionsformel für f an.

d) Eine Menge $U \subset V$ ist ein Untervektorraum von V, falls ...

e) $\{u_1, ..., u_k\} \subset V$ mit $k \leq n$ sind linear abhängig genau dann wenn...

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die minimale Punktanzahl dieser Aufgabe liegt bei 0.

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

b) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation, ist ein Körper.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

c) Seien $v, w \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren, dann ist die Menge $U := \{\lambda \cdot v + \mu \cdot w \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von V.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

d) Seien $v, w \in V$ zwei linear abhängige Vektoren, dann ist die Menge $U := \{\lambda \cdot v + \mu \cdot w \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von V.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

e) Es gibt einen nichttrivialen Vektorraum, in dem es nur endlich viele Vektoren gibt.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

f) Seien U, W Untervektorräume von V. Dann sind $U \cap W$ und $U + W$ Vektorräume.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

g) Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem in V besitzt eine Lösung.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

h) Die Anzahl der Pivotvariablen in der Zeilenstufenform (=Rang des LGS) ist die maximale Anzahl der linear unanhängigen Vektoren des Lösungsraums.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

i) Jede linear unabhängige Familie in V läßt sich zu einer Basis fortsetzen.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

j) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ist eine lineare Abbildung.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

Aufgabe 3 *(5 Punkte)*

Seien $\mathbb{C}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} iz_1 + z_2 &= c \\ z_1 - z_2 &= 1 + i \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems.

b) Gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so dass das LGS keine Lösung besitzt?

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums.

b) Was ist die Dimension des Lösungsraums?

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Erweitern Sie $\{u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ zu einer Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Mit welchem Satz kann man sicher davon ausgehen, dass eine Basiserweiterung stets möglich ist?