Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
18.12.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 12 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Die Lösungsmenge jedes linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn man von einer Gleichung das λ-fache einer anderen Gleichung substrahiert.

2) Jedes lineare Gleichungssystem läßt sich durch äquivalente Umformungen auf Stufenform bringen.

3) Es gibt ein L.G.S, sodass der Rang der Stufenform $n+1$ ist.

4) In Stufenform ist die Anzahl der Pivotvariablen gleich dem Rang.

5) Die Anzahl der Pivotvariablen ist die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des Lösungsraums.

6) Besitzt ein L.G.S eine eindeutige Lösung, so sind die Koeffizientenvektoren linear unabhängig.

7) Ist $U \subset V$ ein Unterraum und $x \in V$, so gibt es ein L.G.S, dessen Lösungsmenge genau $x + U := \{x + y \colon y \in U\}$ ist.

Aufgabe 13 – Der Gauß-Jordan Algorithmus:

Sei $(V, \mathbb{K})$ ein n-dimensionaler Vektorraum. Ferner sei die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gegeben durch

$$\begin{aligned}
c_{1j_1}x_{j_1} + c_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
c_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
&\vdots \\
c_{rj_r}x_{j_r} + c_{rn}x_n &= d_r \\
0 &= d_{r+1} \\
&\vdots \\
0 &= d_m
\end{aligned}$$

Angenommen $r < n$, wir betrachten den homogenen Fall, d.h. $d_1 = d_2 = ... = d_m = 0$.
Mit $B := \{b_1, ..., b_{n-r}\}$ bezeichnen wir die in der Vorlesung konstruierte Basis.

Beweisen Sie: B ist eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 14 – Lineare Gleichungssysteme:

1) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mittels Gauss-Jordan-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & + & 12x_4 & = & 1 \end{array}$$

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} r \cdot x + \quad y + \quad z &= 1 \\ x + r \cdot y + \quad z &= 1 \\ x + \quad y + r \cdot z &= 1 \end{aligned}$$

Hausaufgabe 13 – Lineare Gleichungssysteme:

Gegeben sei ein LGS über $\mathbb{F}_3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 0 &= 1 \\ 2x_1 + 0 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem.

Hausaufgabe 14 – Unterraum und Lösungensmenge eines LGS:

Beweisen Sie die Aussage 7) in Aufgabe 12. Skizzieren Sie die Aussage geometrisch.

Hausaufgabe 15 – Weihnachten: