Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
20.11.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 7 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Seien $u, v, w \in V$ mit $u, v, w \neq 0$. Ist u keine Linearkombination der Vektoren v, w, so sind u, v, w linear unabhängig.

2) Der Vektorraum V besitzt ein erzeugendes System S mit $n+1$ Elementen, d.h. $\text{lin}(S) = V$.

3) Es gibt $n+1$ linear unabhängigen Vektoren in V.

4) Seien $v_1, ..., v_{n+1} \in V$ beliebig. Dann bilden $(v_i)_{i \in \{1,...,n+1\}}$ ein erzeugendes System von V.

Aufgabe 8 – Lineare Unabhängigkeit, Basen:

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig sind. Welche sind Basen, d.h. minimale (bzgl. der Inklusion) erzeugende Systeme?

   (a)
$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}^3$$

   (b)
$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \in (\mathbb{F}_2)^3$$

   (c)
$$\left[\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}^2$$

2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 5) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ auf lineare Unabhängigkeit.

   (a) 10 und $14 + \sqrt{2}$, (b) $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$, (c) 5 und $7 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

3. Seien $(a, b)^t$ und $(c, d)^t$ zwei Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass sie genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$ ist.

4. (Vgl. Aufgabe 6) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Paare von Vektoren $f, g \in V$ jeweils linear unabhängig sind. Welche darunter bilden eine Basis von V?

   (a) $f(x) = x$ und $g(x) = 1$

   (b) $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$

   (c)* $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(2x)$

Hausaufgabe 7 – Basen von Untervektorräumen:

Bestimmen Sie die Basen der folgenden Untervektorräume. Skizzieren Sie diese Räume.

1) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \right\} \subset \mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

3*) $V_3 = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 5+i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-5i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.

4*) $V_4 = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 5+i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-5i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Hausaufgabe 8 – Untervektorräume:

Sei $n\mathbb{Z} = \{nm \colon m \in \mathbb{Z}\}$.

a) Zeigen Sie: $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$ sind Unterräume von $\mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie: $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$.

Hausaufgabe 9 – Permutationsgruppe:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$. Die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ ist eine Gruppe. Wir nennen sie symmetrische Gruppe S_n von $\{1, \dots, n\}$. Deren Elemente heißen *Permutationen* und können in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

1) Listen Sie die Elemente in S_1,S_2 und S_3 auf.

2) Wieviele Elemente hat S_n?