Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
06.11.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 4 – Gruppen:

Seien $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq 0$, $\bar{a} := \{b \in \mathbb{Z} \colon b \mod m \equiv a\}$ und $Z_m := \{\bar{a} : a \in \mathbb{Z}\}$.

i) Zeigen Sie : $\mathbb{Z}_4$ mit der Verknüpfung $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b}$ ist eine Gruppe.

ii) Ist $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Behauptung.

iii) Untersuchen Sie, ob $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ eine Gruppe ist. Skizzieren Sie die Gruppenoperation.
(Hinweis: Polardarstellung der komplexen Zahlen)

Aufgabe 5 – Körper:

Zeigen Sie : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \ \mathbb{Q}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2}) &:= (a_1 + b_1) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}; \\ (a_1 + a_2\sqrt{2}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{2}) &:= (a_1b_1 + 2a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}\end{aligned} \tag{*}$$

ist ein Körper.

Aufgabe 6 – Vektorräume:

a) Sei X eine Menge und $\mathbb{K}^X := \{f : X \to \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: $\mathbb{K}^X$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bezüglich der Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x), \ \forall x \in X$ und der Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \ \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

b) Bei welchen der folgenden Mengen (mit der gleichen Addition und Multiplikation wie in a)) handelt es sich um einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

i) $P(\mathbb{C}) := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \ p \text{ ist ein Polynom}\}$ ii) $P^0(\mathbb{C}) := \{p \in \ P(\mathbb{C}) : p(0) = 0\}$ iii) $P^1(\mathbb{C}) := \{p \in \ P(\mathbb{C}) : p(0) = 1\}$ iv) $P_n(\mathbb{C}) := \{p \in \ P(\mathbb{C}) : \deg(p) \leq n\}, \ (n \in \mathbb{N})$

c) Entscheiden Sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt.

i) $c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition

ii) $c_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition

Hausaufgabe 4 – Operationen in Vektorräumen:

Skizzieren Sie folgende Menge. Entscheiden Sie, welche Menge einen Vektorraum darstellt.

1) [Lineare Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2) [Affine Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3) [Konvexe Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in [0,1], \alpha \in [0, 2\pi]\}$.

Hausaufgabe 5 – Untervektorraum:

Definition Es sei $(V, +, \cdot)$ ein K–Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt ein *Untervektorraum* von V, falls folgendes gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$.
3. $v \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in U$.

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der jeweiligen Vektorräume?

1. $\{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 3a + 5b + 2ab = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
2. $\{(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3 \mid a + b \geq c\} \subset \mathbb{R}^3$
3. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Hausaufgabe 6 – Symmetriegruppe:

i) Mit $\{d_0, d_{\frac{2\pi}{3}}, d_{\frac{4\pi}{3}}\}$ bezeichnen wir die Menge der Drehungen des gegebenen Dreiecks in der Ebene um jeweils $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Diese Drehungen bilden eine Gruppe.
Geben Sie die Verknüpfung, das neutrale Element und das Inverse von $d_{\frac{4\pi}{3}}$ bzgl. dieser Verknüpfung an.

ii) Überlegen Sie sich, dass die Drehungen aus a) und die Spiegelungen, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, wieder eine Gruppe bilden.

iii) Geben Sie graphisch alle Möglichkeiten an, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Buchstaben A, B, C zu versehen.