



2. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 4 – Gruppen:

Seien $\bar{a} := \{b \in \mathbb{Z} : b \bmod m \equiv a\}$ und $Z_m := \{\bar{a} : a \in \mathbb{Z}\}$.

- i) Zeigen Sie : \mathbb{Z}_4 mit der Verknüpfung $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$ ist eine Gruppe.
- ii) Ist $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Behauptung.
- iii) Untersuchen Sie, ob $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der Multiplikation auf \mathbb{C} eine Gruppe ist. Skizzieren Sie die Gruppenoperation.

Aufgabe 5 – Körper:

Zeigen Sie : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2}) &:= (a_1 + b_1) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}; & (*) \\ (a_1 + a_2\sqrt{2}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{2}) &:= (a_1b_1 + 2a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \end{aligned}$$

ist ein Körper.

Aufgabe 6 – Vektorräume:

- a) Sei X eine Menge und $\mathbb{K}^X := \{f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: \mathbb{K}^X ist ein Vektorraum über \mathbb{K} bezüglich der Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$ und der Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- b) Bei welchen der folgenden Mengen (mit der gleichen Addition und Multiplikation wie in a)) handelt es sich um einen Vektorraum über \mathbb{C} .
 - i) $P(\mathbb{C}) := \{p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : p \text{ ist ein Polynom}\}$
 - ii) $P^0(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 0\}$
 - iii) $P^1(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 1\}$
 - iv) $P_n(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : \deg(p) \leq n\}$, ($n \in \mathbb{N}$)
- c) Entscheiden Sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt.
 - i) $c := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition
 - ii) $c_1 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition

Hausaufgabe 4 – Operationen in Vektorräumen:

Skizzieren Sie folgende Menge. Entscheiden Sie, welche Menge einen Vektorraum darstellt.

- 1) [Lineare Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- 2) [Affine Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- 3) [Konvexe Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in [0, 1], \alpha \in [0, 2\pi]\}$.

Hausaufgabe 5 – Untervektorraum:

Definition Es sei $(V, +, \cdot)$ ein K -Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt ein *Untervektorraum* von V , falls folgendes gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$.
3. $v \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in U$.

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der jeweiligen Vektorräume?

1. $\{(a, b)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 3a + 5b + 2ab = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
2. $\{(a, b, c)^t \in \mathbb{R}^3 \mid a + b \geq c\} \subset \mathbb{R}^3$
3. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Hausaufgabe 6 – Symmetriegruppe:

- i) Mit $\{d_0, d_{\frac{2\pi}{3}}, d_{\frac{4\pi}{3}}\}$ bezeichnen wir die Menge der Drehungen des gegebenen Dreiecks in der Ebene um jeweils $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Diese Drehungen bilden eine Gruppe. Geben Sie die Verknüpfung, das neutrale Element und das Inverse von $d_{\frac{4\pi}{3}}$ bzgl. dieser Verknüpfung an.
- ii) Überlegen Sie sich, dass die Drehungen aus a) und die Spiegelungen, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, wieder eine Gruppe bilden.
- iii) Geben Sie graphisch alle Möglichkeiten an, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Buchstaben A, B, C zu versehen (vergleichen Sie hierzu auch Aufgabe 1b)). Welche der unter b) beschriebenen geometrischen Operationen überführt ${}_A\Delta_B^C$ auf diese Dreiecke?