Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
23.10.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 1 – Quantoren:

Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren:
„Für jede reelle Zahl a und jede noch so kleine positive Zahl ϵ gilt: Es gibt eine rationale Zahl q, deren Abstand zu a kleiner als ϵ ist.“

Aufgabe 2 – Logisches Schließen:

Anna sagt: “Bettina lügt.”
Bettina sagt: “Claudia lügt.”
Claudia sagt: “Anna und Bettina lügen.”
Wer lügt denn nun?

Aufgabe 3 – Körper:

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ mit $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ mit $\mathbb{Z}$. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit $\mathbb{R}$.

i) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lösbar?

a) $x - 1 = 0$
b) $x + 1 = 0$
c) $x^2 = 4$
d) $x^2 = 2$
e) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$

ii) Geben Sie eine Gleichung an, die nicht in $\mathbb{R}$ lösbar ist.

Hausaufgabe 1 – Quantoren:

Welche der folgenden Aussagen gelten in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$? Welche gelten in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$?

1. $\forall x \exists y : y < x$.
2. $\exists x \forall y : y < x$.
3. $\forall x \forall y : (x < y \vee x = y \vee y < x)$.
4. $\forall x \exists y : x^2 = y$.
5. $\forall x \forall y \exists z : y = x + z$.

Hausaufgabe 2 – Lineare Gleichungssysteme:

Gegeben seien

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{llllll} x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 5\,. \end{array}$$

i) Berechnen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme.

ii) Schreiben Sie die Gleichungssysteme in Matrixform um.

Hausaufgabe 3 – Symmetriegruppe* (zum Knobeln):

Bestimmen Sie alle Symmetrien eines regelmäßigen Tetraeders mit Kantenlänge 1.

i) Überlegen Sie sich, warum die Anzahl der Symmetrie 24 betragen muss.

ii) Wieviele Drehachsen gibt es, die durch die Ecken und die Mitten der gegenüberliegenden Seitenflächen bestimmt sind?

iii) Wieviele Drehachsen gibt es, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten bestimmt sind?

iv) Bestimmen Sie alle Spiegelungen an Ebenen, die jeweils zu einer Kante senkrecht sind und durch den Mittelpunkt dieser Kante gehen.

v) Das Tetraeder kann in einen Würfel mit Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}$ einbeschrieben werden, skizzieren Sie dies. Bestimmen Sie 6 Drehspiegelungen, die das Tetraeder auf sich abbilden (Symmetrie).