



# 1. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

## Aufgabe 1 – Quantoren:

Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren:

„Für jede reelle Zahl  $a$  und jede noch so kleine positive Zahl  $\epsilon$  gilt: Es gibt eine rationale Zahl  $q$ , deren Abstand zu  $a$  kleiner als  $\epsilon$  ist.“

## Aufgabe 2 – Logisches Schließen:

Anna sagt: „Bettina lügt.“

Bettina sagt: „Claudia lügt.“

Claudia sagt: „Anna und Bettina lügen.“

Wer lügt denn nun?

## Aufgabe 3 – Körper:

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen  $0, 1, 2, \dots$  mit  $\mathbb{N}$  und die ganzen Zahlen  $0, 1, -1, 2, -2, \dots$  mit  $\mathbb{Z}$ . Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist gegeben durch  $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ . Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit  $\mathbb{R}$ .

i) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  lösbar?

a)  $x - 1 = 0$

b)  $x + 1 = 0$

c)  $x^2 = 4$

d)  $x^2 = 2$

e)  $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$

ii) Geben Sie eine Gleichung an, die nicht in  $\mathbb{R}$  lösbar ist.

## Hausaufgabe 1 – Quantoren:

Welche der folgenden Aussagen gelten in der Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ ? Welche gelten in der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ ?

1.  $\forall x \exists y : y < x$ .

2.  $\exists x \forall y : y < x$ .

3.  $\forall x \forall y : (x < y \vee x = y \vee y < x)$ .

4.  $\forall x \exists y : x^2 = y$ .

5.  $\forall x \forall y \exists z : y = x + z$ .

**Hausaufgabe 2 – Lineare Gleichungssysteme:**

Gegeben seien

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 & & x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 0 & \text{und} & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = & 0 & & 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 5 . \end{array}$$

- i) Berechnen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme.
- ii) Schreiben Sie die Gleichungssysteme in Matrixform um.

**Hausaufgabe 3 – Symmetriegruppe\* (zum Knobeln):**

Bestimmen Sie alle Symmetrien eines regelmäßigen Tetraeders mit Kantenlänge 1.

- i) Überlegen Sie sich, warum die Anzahl der Symmetrie 24 betragen muss.
- ii) Wieviele Drehachsen gibt es, die durch die Ecken und die Mitten der gegenüberliegenden Seitenflächen bestimmt sind?
- iii) Wieviele Drehachsen gibt es, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten bestimmt sind?
- iv) Bestimmen Sie alle Spiegelungen an Ebenen, die jeweils zu einer Kante senkrecht sind und durch den Mittelpunkt dieser Kante gehen.
- v) Das Tetraeder kann in einen Würfel mit Kantenlänge  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  einbeschrieben werden, skizzieren Sie dies. Bestimmen Sie 6 Drehspiegelungen, die das Tetraeder auf sich abbilden (Symmetrie).