**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. U. Reif
Nicole Lehmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.06.2010

# 9. Übung

## Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

**Aufgabe 29 und 30: [M]**
Für kardinale B-Splines, also B-Splines mit Knoten $T = \mathbb{Z}$, soll die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_j^n(t) b_i^m(t)\, dt = b_{j-m}^{n+m}(i)$$

bewiesen werden.

a) Überprüfen Sie das Resultat zunächst für den Fall $n = m = 2$.

b) Geben Sie die Formeln für die Differenziation und Integration von B-Splines für den Fall $T = \mathbb{Z}$ an.

c) Zeigen Sie $b_\ell^r(k) = b_0^r(k - \ell)$ und folgern Sie daraus, dass es genügt, die Formel für $j = 0$ zu beweisen.

d) Beweisen Sie die Formel speziell für $m = 1$. Verwenden Sie dazu die Resultate aus Aufgabe 22.

e) Beweisen Sie die Formel mittels vollständiger Induktion und partieller Integration für allgemeines $m$.

**Aufgabe 31: [H]**
Sei $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t)]$, $t \in [a, b]$ eine glatte, positiv orientierte Jordankurve und $\Gamma$ das von $\mathbf{c}$ berandete Gebiet.

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes, dass für den Flächeninhalt von $\Gamma$ gilt

$$|\Gamma| = \int_{t=a}^{b} x(t) y'(t)\, dt.$$

b) Sei nun speziell $\mathbf{c} = B^n\mathbf{P} = \sum_{j=1}^r b_j^n \mathbf{p}_j$ eine periodische Splinekurve mit Knoten $\tau_j = j$. Die $x$- und $y$-Koordinaten der Kontrollpunkte bilden Vektoren $X$ und $Y$, also $\mathbf{P} = [X, Y]$. Geben Sie eine $(r \times r)$-Matrix $M$ an mit

$$|\Gamma| = X^{\mathrm{t}} M Y.$$

Verwenden Sie hierzu das Resultat aus der ersten Aufgabe.

c) Bestimmen Sie $M$ konkret für die Ordnungen $n = 2$ und $n = 3$.

**Aufgabe 36: [P]**
Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$S = \texttt{Zero}(P, T),$$

das die Nullstellen $S$ zu einem gegebenen Spline $f = \sum_j b_j^n p_j$ mit nicht-entarteten Knoten $T$ die Koeffizienten $P$ durch iteriertes Knoteneinfügen bestimmt.