Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
Nicole Lehmann

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23.06.2010

8. Übung

Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

Aufgabe 25: [M]
a) Bezeichne $b^n_{j,h}$ den B-Spline der Ordnung n mit Knoten $\tau_\ell = \ell h$ und Träger $[\tau_j, \tau_{j+n}]$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

$$b^n_{j,2h} = 2^{1-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^n_{2j+k,h}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Differenziationsformel.

b) Geben Sie einen Algorithmus $\{p_j\} \to \{q_j\}$ an, der den Übergang der Kontrollpunkte bezüglich Knotenabstand $2h$ zu Knotenabstand h beschreibt,

$$\sum_j b^n_{j,2h}\, p_j = \sum_j b^n_{j,h}\, q_j\,.$$

c) Diskutieren Sie die Spezialfälle $n = 3$ und $n = 4$.

Aufgabe 26: [M]
Sei $T = \mathbb{Z}$ und $\nu \leq n$.

a) Zeigen Sie: Der Spline $f = \sum_j b^n_j p_j$ ist genau dann ein Polynom der Ordnung ν, wenn es ein Polynom p der Ordnung ν gibt mit $p_j = p(j)$.
b) Sei speziell $f(t) = t^{\nu-1}$. Geben Sie das Polynom p an für $n = 1, \ldots, 4$ und alle zulässigen ν.

Aufgabe 27: [H]
Gegeben seien zwei Splineräume S_{n^1,T^1} und S_{n^2,T^2} mit $D(T^1) = D(T^2)$.

a) Geben Sie einen Splineraum S_{n^+,T^+} mit möglichst wenigen Knoten an, sodass $f + g \in S_{n^+,T^+}$ für alle $f \in S_{n^1,T^1}$ und $g \in S_{n^2,T^2}$.

b) Geben Sie einen Splineraum S_{n^*,T^*} mit möglichst wenigen Knoten an, sodass $fg \in S_{n^*,T^*}$ für alle $f \in S_{n^1,T^1}$ und $g \in S_{n^2,T^2}$.

Aufgabe 32: [P]
Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[P', T'] = \texttt{SplDiff}(P, T),$$

das zu einem gegebenen Spline $f = \sum_j b^n_j p_j$ mit nicht-entarteten Knoten T die Koeffizienten P' und Knoten T' der Ableitung $f' = \sum_j b^{n-1}_j p'_j$ bestimmt. Dabei soll der Knotenvektor T' wieder nicht-entartet sein.