

16.06.2010

## 7. Übung

### Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

#### Aufgabe 25: [M]

Beweisen Sie die Basiseigenschaft der B-Splines  $b_1^n, \dots, b_m^n$  für den Fall mehrfacher Knoten.

#### Aufgabe 26: [M]

a) Seien  $b_j^n$  und  $\tilde{b}_j^n$  die B-Splines der Ordnung  $n$  zu den Knotenfolgen  $T$  bzw.  $\tilde{T} := \alpha T + \beta$ , wobei  $\alpha \neq 0$ .  
Beweisen Sie mit Hilfe der Marsden-Identität die Beziehung

$$\tilde{b}_j^n(\alpha t + \beta) = b_j^n(t).$$

Gilt etwas Vergleichbares auch für die Basis der abgebrochenen Potenzen?

b) Für Ordnungen  $n \geq 2$  definiert man die *Greville-Abszissen* („Mittel der inneren Knoten“) gemäß

$$\tau_j^* := \frac{\tau_{j+1} + \dots + \tau_{j+n-1}}{n-1}.$$

Zeigen Sie, dass die Identität auf dem kanonischen Definitionsbereich  $D(T)$  in der Form  $t = \sum_j b_j^n(t) \tau_j^*$  dargestellt werden kann.

c) Sei  $\tau_j \in D(T)$  ein Knoten mit  $\#j = n - 2$ . Zeigen Sie, dass dann der Spline  $f = B^n P$  die Interpolationseigenschaft  $f(\tau_j) = p_{j-1}$  besitzt.

#### Aufgabe 27: [H]

a) Gegeben sei ein Spline  $f$  der Ordnung  $n$  mit ganzzahligen Knoten und Kontrollpunkten  $P$ . Geben Sie mit Hilfe des Vorwärtsdifferenzenoperators  $\Delta$  die Koeffizienten der ersten Ableitung  $Df$  und dann der  $k$ -ten Ableitung  $D^k f$  an.

b) Die Knotenfolge  $T$  sei nun beliebig. Zeigen Sie

$$P \geq 0 \Rightarrow f \geq 0, \quad \Delta P \geq 0 \Rightarrow Df \geq 0.$$

c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass aus  $\Delta^2 P \geq 0$  im Allgemeinen nicht  $D^2 f \geq 0$  folgt.

#### Aufgabe 28: [P]

Sei  $T = [\tau_1, \dots, \tau_{n+m}]$  eine nichtentartete Knotenfolge und  $\mathbf{f}(t) = \sum_j b_j^n(t) \mathbf{p}_j$  eine Splinekurve über dem Definitionsbereich  $D(T) = [\tau_n, \tau_{m+1})$ . Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{F} = \text{DeBoor}(\mathbf{P}, T, S),$$

das  $\mathbf{f}$  an den Stellen  $S$  mit Hilfe des de Boor-Algorithmus auswertet. Achten Sie darauf, dass auch Argumente außerhalb des kanonischen Definitionsbereichs korrekt verarbeitet werden.