Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
Nicole Lehmann

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

02.06.2010

1. Übung

Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

Aufgabe 21: [M]
Bezeichne

$$\Delta_\tau^\ell f := \lim_{t \downarrow \tau} f^{(\ell)}(t) - \lim_{t \uparrow \tau} f^{(\ell)}(t)$$

den Sprung der ℓ-ten Ableitung von f an der Stelle τ. Ferner sei T eine nichtentartete Knotenfolge und $a_j^n(t) = (t-\tau_j)_+^{n-1-\#j}$ die abgebrochene Potenz zum Knoten τ_j.
a) Berechnen Sie $\Delta_{\tau_j}^\ell a_j^n$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$.
b) Sei $T^* = T \cup \{\tau^*\}$ und $f^* \in S_{n,T^*}$, wobei $\tau^* \in D(T)$ ein k-facher Knoten in T^* ist. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$f := f^* - \alpha(\cdot - \tau^*)_+^\ell \in S_{n,T}.$$

Aufgabe 22: [M]
a) Zeigen Sie, dass die B-Splines $b_1^n, \ldots, b_n^n$ zur Knotenfolge $T := [0\$n, 1\$n]$ auf dem Definitionsgebiet $D(T) = [0,1)$ mit den Bernsteinpolynomen der Ordnung n übereinstimmen.
b) Sei $T_n := [0, \ldots, n]$. Zeigen Sie, dass für die durch die Rekursion

$$b^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad b^{n+1}(t) = \int_{t-1}^{t} b^n(s)\, ds$$

definierte Funktionenfolge gilt: *i)* b^n ist ein Spline der Ordnung n über der Knotenfolge T_n. *ii)* $\operatorname{supp} b^n = [0,n]$. *iii)* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b^n(t-j) \equiv 1$. Interpretieren Sie das Ergebnis.
[∗] Sei $c^n(t) := b^n(t+n/2)$ der *zentrierte kardinale B-Spline* der Ordnung n. Bestimmen Sie für $n = 4, 5, 6, \ldots$ experimentell oder [∗∗] analytisch Konstanten α_n, β_n so, dass

$$c^n(t) \approx \alpha_n \exp(-\beta_n\, t^2)\,.$$

Aufgabe 23: [H]
Sei $T = [\tau_1, \ldots, \tau_{n+m}]$ ein beliebiger Knotenvektor und

$$\psi_j^n(\tau) := \prod_{i=j+1}^{j+n-1} (\tau_i - \tau).$$

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $\psi_{k-n+1}^n, \ldots, \psi_k^n$ linear unabhängig sind, sofern $\tau_k < \tau_{k+1}$.
b) Sei wieder $\tau_k < \tau_{k+1}$ und die $n \times n$-Matrix M definiert durch

$$M_{j,\ell} = \psi_{k-n+\ell}^n(\sigma_j), \quad j, \ell = 1:n.$$

Zeigen Sie (ohne Rechnung), dass M invertierbar ist, wenn die Stützstellen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ paarweise verschieden sind. Wozu lässt sich dieses Resultat verwenden?

Aufgabe 24: [P]
Sei $T = [\tau_1, \ldots, \tau_{n+m}]$ eine nichtentartete Knotenfolge und $\mathbf{f}(t) = \sum_j b_j^n(t)\mathbf{p}_j$ eine Splinekurve über dem Definitionsbereich $D(T) = [\tau_n, \tau_{m+1})$. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{F} = \texttt{MarsdenSplVal}\,(\mathbf{P}, T, S)\,,$$

das $\mathbf{f}$ an den Stellen S mit Hilfe der Marsden-Identität auswertet.
Hinweise: Arbeiten Sie in einer Schleife die relevanten Segmente $[\tau_k, \tau_{k+1})$ ab. Beim Aufbau der Matrix M gemäß Aufgabe 23 kann durch den Befehl `cumprod` eine Schleife vermieden werden.