Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
Nicole Lehmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12.05.2010

4. Übung

Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

Aufgabe 13: [M]
Der Übergang von Kontrollpunkten $\mathbf{P}$ zu $\mathbf{P}_\ell, \mathbf{P}_r, \mathbf{P}_{a,b}$ für die Unterteilung

$$B^n(st)\mathbf{P} = B^n(t)\mathbf{P}_s^\ell, \quad B^n(s+t(1-s))\mathbf{P} = B^n(t)\mathbf{P}_s^r, \quad B^n(a+t(b-a))\mathbf{P} = B^n(t)\mathbf{P}_{a,b}$$

wird durch Matrizen $M_s^\ell, M_s^r, M_{a,b}$ beschrieben, also

$$\mathbf{P}_s^\ell = M_s^\ell \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}_s^r = M_s^r \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}_{a,b} = M_{a,b}\mathbf{P}.$$

a) Geben Sie für $s = 1/2$ die Matrix M_s^ℓ explizit an.

b) Drücken Sie M_s^r mittels M_s^ℓ aus. *Hinweis:* Symmetrie.

c) Drücken Sie $M_{a,b}$ mitttels M_s^ℓ und M_s^r aus.

Aufgabe 14: [M]
Sei $c = B^n P$ ein Polynom der Ordnung n und $\tilde{c} = B^n \tilde{P}$ das Segment von c, das dem Intervall $[a, b]$ entspricht, also $\tilde{c}(t) = c(a + th), h = b - a$. Ferner sei $\tilde{p}$ das Kontrollpolygon zu $\tilde{c}$.

a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|\tilde{c} - \tilde{p}\| \le \frac{h^2(n-1)}{8} \|\Delta^2 P\|_\infty.$$

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Euklidischen Abstand zwischen einer Bézierkurve $\mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^d$ und deren Kontrollpolygon $\mathbf{p}$ an,

$$\max_{t\in[0,1]} \|\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}(t)\|_2 \le ?$$

Aufgabe 15: [H]
Für einen Vektor $P = [p_1, \dots, p_n]^T$ schreiben wir $P \in \mathbb{P}_m$, wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{P}_m$ gibt, sodass $p_j = p(j), j = 1 : n$. Zeigen Sie

$$B^n P \in \mathbb{P}_m \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathbb{P}_m.$$

Hinweis: Differenzieren!

Aufgabe 16: [P]
Schreiben Sie ein rekursives Matlab-Programm

$$\texttt{BezPlot}\,(\mathbf{P}, tol),$$

das die ebene Bézierkurve $\mathbf{c}$ mit Kontrollpunkten $\mathbf{P}$ plottet. Dabei soll das Kontrollpolygon $\mathbf{p}$ geplottet werden, wenn der Euklidische Abstand zwischen Kurve und Kontrollpolygon punktweise kleiner als eine vorgegebene Toleranz tol ist,

$$\max_{t\in[0,1]} \|\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}(t)\|_2 \le tol.$$

Anderenfalls soll die Bézierkurve an der Stelle $t_0 = 1/2$ unterteilt werden. Versuchen Sie, die entstehende Segmentierung der Kurve geeignet zu visualisieren (z.B. durch verschiedene Farben, Markierung der Segmentgrenzen, etc.). Testen Sie Ihr Programm, indem Sie `TstBezPlot` aufrufen.