Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
Nicole Lehmann

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

05.05.2010

3. Übung

Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

Aufgabe 9: [M]
Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Die Vereinigung konvexer Mengen ist konvex.
ii) Der Schnitt konvexer Mengen ist konvex.
iii) Das affine Bild einer konvexen Menge ist konvex.
iv) Eine offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist konvex.
v) Das Komplement einer konvexen Menge ist nicht konvex.

Aufgabe 10: [M]
a) Konstruieren Sie eine ebene kubische Bézierkurve mit $\mathbf{c}(0) = [0,0]$ und $\mathbf{c}(1) = [1,0]$, die in $t = 1/2$ einem singulären Punkt hat, d.h. $\|\mathbf{c}'(1/2)\| = 0$.

b) Sei $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = \mathbf{p}_{m-1} \neq \mathbf{p}_m$ für ein m mit $2 \leq m \leq n$ und $\mathbf{c} = \sum_i b_i^n \mathbf{p}_i$ die zugehörige Bézierkurve. Berechnen Sie

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 11: [H]
a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von b_{j+1}^{n+1} auf dem Intervall $[0,1]$.

b) Beweisen Sie die Produktformel

$$\binom{n+m}{k+\ell} b_{k+1}^{n+1} b_{\ell+1}^{m+1} = \binom{n}{k}\binom{m}{\ell} b_{k+\ell+1}^{n+m+1}.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 b_k^n(t)\, dt = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

d) Bestimmen Sie die Gram-Matrix G^n bezüglich der Bernsteinpolynome der Ordnung n und dem L^2-Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

[*] Vergleichen Sie numerisch die Konditionszahlen der Gramschen Matrizen bezüglich der Bernsteinpolynome und der Monombasis für verschiedene Werte der Ordnung n.

Aufgabe 12: [P]
a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{C} = \texttt{DeCasteljau}\,(\mathbf{P}, T),$$

das die Werte $\mathbf{C}$ der Bézierkurve mit Kontrollpunkten $\mathbf{P}$ an den Stellen $T = [t_1, \ldots, t_m]$ mittels des de Casteljau-Algorithmus bestimmt.

b) Sei $\mathbf{c}(t) = B^n(t)\mathbf{P}$. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{Q} = \texttt{BezDiff}\,(\mathbf{P}, m),$$

das für beliebige ganze Zahlen $m < n$ die Kontrollpunkte $\mathbf{Q}$ der Kurve $D^m\mathbf{c}(t) = B^{n-m}(t)\mathbf{Q}$ berechnet. Testen Sie die Programm, indem Sie `TstDeCasteljau` und `TstBezDiff` aufrufen.