Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
Nicole Lehmann

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

28.04.2010

2. Übung

Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

Aufgabe 5: [M]

a) Sei $f(t) = \sqrt{t}, t \in [0,1]$. Wie groß ist (gemäß den Abschätzungen des Beweises) die Ordnung n zu wählen, damit die Maximumnorm des Fehlers $\Delta := f - B^n f$ des Bernsteinoperators kleiner als $\varepsilon = 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ wird?

b) Beim Beweis des Satzes von Weierstraß wurden Darstellungen für die Funktionen $1, t, t^2$ als Linearkombinationen von Bernstein-Polynomen hergeleitet. Geben Sie allgemein für $k = 0, \ldots, n$ Koeffizienten a_i^k an, sodass

$$t^k = \sum_{i=0}^{n} a_i^k b_{i+1}^{n+1}(t)$$

gilt. Folgern Sie hieraus, dass die Bernstein-Polynome $b_1^{n+1}, \ldots, b_{n+1}^{n+1}$ eine Basis des Raums $\mathbb{P}_{n+1}$ bilden.

Aufgabe 6: [M]

a) Das Polynom $p(t) := \sum_{i=1}^{n} p_i b_i^n(t)$ soll mit Hilfe des Horner-Schemas ausgewertet werden. Bestimmen Sie dazu Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ so, dass

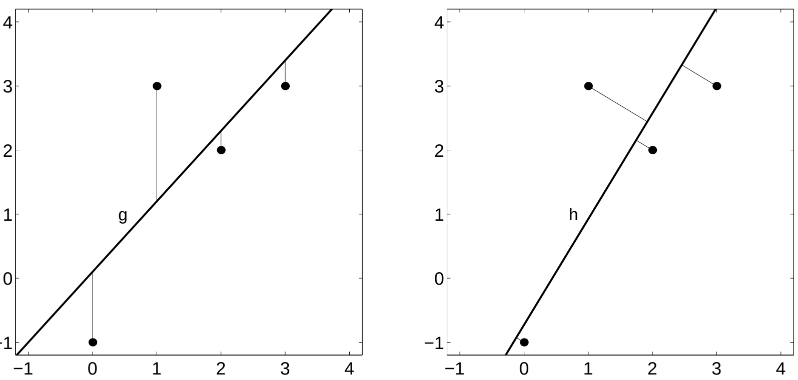
$$p(t) = t^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_i u^{n-i}, \quad u := \frac{1-t}{t}.$$

b) Gibt es eine ähnliche Formel, die keine Definitionslücke an der Stelle $t = 0$ aufweist?

Aufgabe 8: [H]

a) Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $g \in \mathbb{P}_2$ zu den Datenpunkten $(0, -1), (1, 3), (2, 2), (3, 3)$ nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

b) Bestimmen Sie eine Gerade h so, dass die Summe der quadrierten Euklidischen Abstände zwischen den Punkten aus Teil a) und der Geraden h minimal wird. Vergleichen Sie g und h. *Hinweis:* Hessesche Normalform, Lagrange-Multiplikator, verallgemeinertes Eigenwertproblem.



Aufgabe 8: [P]
Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$P = \texttt{BernOper}(\texttt{fct}, n, T),$$

welches das durch den Bernstein-Operator gegebene Polynom p der Ordnung n an den Stellen $T = [t_1, \ldots, t_m]$ mittels des Verfahrens aus Aufgabe 6 auswertet, also $P = [p(t_1), \ldots, p(t_m)]$. Dabei ist `fct` ein String, der den Namen der auszuwertenden Funktion enthält. Die Befehle `feval, nchoosek` und `polyval` sind hilfreich. Testen Sie Ihr Programm durch den Aufruf

$$\texttt{BernOper}('\texttt{sqrt}', \texttt{n}, \texttt{linspace}(0, 1))$$

für diejenigen Werte von n, die Sie in Aufgabe 5a erhalten haben. Wie groß ist die maximale Abweichung tatsächlich?