Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
Nicole Lehmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.04.2010

1. Übung

Geometrische Datenverarbeitung SS 2010

Aufgabe 1: [M]
Eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll an den Stellen $T = [0, \varepsilon, 1]$ durch ein Polynom p_ε der Ordnung 3 interpoliert werden.

a) Geben Sie für $\varepsilon \neq 0$ bzw. $\varepsilon = 0$ das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von p_ε in Monomform an.

b) Zeigen Sie, dass $\lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon = p_0$ gilt. *Hinweis:* Hierzu müssen die Gleichungssysteme aus Teil b) nicht explizit gelöst werden.

Aufgabe 2: [M]
Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Funktionennorm. Es soll gezeigt werden, dass es zu einer gegebenen Funktion f ein Polynom $p_* \in \mathbb{P}_n$ gibt, das den Fehler $\|f - p\|$ minimiert, also

$$\|f - p_*\| = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|.$$

Hierzu betrachten wir eine Folge immer besserer Näherungen $p_k \in \mathbb{P}_n$ mit

$$\|f - p_{k+1}\| \leq \|f - p_k\|, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

und

$$\lim_{k \to \infty} \|f - p_k\| = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge p_k beschränkt ist durch $\|p_k\| \leq 2\|f\| + \|p_0\|, k \in \mathbb{N}_0$.

b) Folgern Sie aus dem Satz von Heine-Borel, dass es ein Polynom p_* mit den gewünschten Eigenschaften gibt.

c) Sei nun konkret $n = 2$ und $\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Polynom p_* nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 3: [H]
Für Vektoren $F = [f_1, \ldots, f_n] \in \mathbb{R}^n$ definieren wir wie üblich $\|F\|_\infty := \max_i |f_i|$. Sei $T = [t_1, \ldots, t_n]$ ein Vektor paarweise verschiedener Stützstellen und $p \in \mathbb{P}_n$ die Lösung des Interpolationsproblems (T, F). Nun werden die Daten F gestört. Das neue Problem $(T, \tilde{F})$ hat die Lösung $\tilde{p}$ und es stellt sich die Frage, wie stark sich p und $\tilde{p}$ an einer Stelle $t \in \mathbb{R}$ maximal unterscheiden können. Dazu definiert man die Funktion

$$c(t) := \max_{F, \tilde{F}} \frac{|p(t) - \tilde{p}(t)|}{\|F - \tilde{F}\|_\infty}.$$

Große Werte von $c(t)$ zeigen also, dass kleine Änderungen in den Daten große Änderungen des Interpolanten an der Stelle t zur Folge haben können.

a) Verifizieren Sie $c(t_i) = 1$.

b) Zeigen Sie $c(t) = \sum_{i=1}^n |\ell_i(t)|$, wobei ℓ_i das i-te Lagrange-Polynom zu den Stützstellen T ist.

c) Bestimmen Sie $c(t)$ explizit für $T = [-1, 0, 1]$ und skizzieren Sie die Funktion c auf dem Intervall $[-1, 1]$. Wie ändert sich das Bild, wenn man $T = [-h, 0, h]$ und das Intervall $[-h, h]$ betrachtet?

d[*]) Sei $T = -m : m$. Plotten Sie für $m = 5, 10, 15, \ldots$ die Funktion c auf dem Intervall $[-m, m]$ und bestimmen Sie dort (numerisch) das Maximum. Welche Schlussfolgerungen lassen sich daraus für die Interpolation mit Polynomen hoher Ordnung ziehen?

Aufgabe 4: [P]
Die Funktion $f(t) = e^t$ soll auf dem Intervall $[0, 1]$ durch ein Polynom $p_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^{n-i}$ bezüglich des L^2-Skalarprodukts $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ approximiert werden.

a) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$A = \texttt{L2Approx}(n),$$

das den Koeffizientenvektor $A = [a_1, \ldots, a_n]$ bestimmt. *Hinweis:* Für die Zahlen $u_i := \int_0^1 e^t t^i\,dt$ gilt die Rekursion $u_0 = e - 1,\ u_i = e - iu_{i-1}$.

b) Plotten Sie den Fehler $f - p_n$ für $n = 4, 8, 12, 16$ und diskutieren Sie das Ergebnis.